

# Rationale Zahlen als Summe ägyptischer Brüche

Uta Priß

angefertigt bei

Priv. Doz. Dr. A. Kemnitz

Diskrete Mathematik

Technische Universität Braunschweig

Juli 1992

<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1 Allgemeine Aussagen</b>	<b>6</b>
1.1 Festlegungen . . . . .	6
1.2 Existenz von Darstellungen für $m/n$ . . . . .	6
1.3 Darstellung mit verschiedenen Nennern . . . . .	8
1.4 Darstellung der 1 . . . . .	11
1.5 $\mathcal{N}_s$ ist nicht dicht in $\mathbf{Q}^+$ . . . . .	13
1.6 Algorithmen . . . . .	14
1.6.1 Der Fibonacci-Sylvester-Algorithmus . . . . .	16
1.6.2 Die Splitting-Methode und die $2/n$ -Splitting-Methode	17
1.6.3 Multiplikationsalgorithmen . . . . .	17
1.6.4 Praktische Zahlen . . . . .	19
1.6.5 Weitere Algorithmen . . . . .	20
1.7 Die Vermutungen von Erdős, Sierpiński und Schinzel . . . . .	21
<b>2 Eine allgemeine Formel für die Zerlegung in drei Stammbrüche</b>	<b>24</b>
2.1 Vorbemerkung . . . . .	24
2.2 Herleitung der Formel . . . . .	24
2.3 Die Bedeutung von $d$ und $\delta$ . . . . .	27
2.4 Teilbarkeitsbedingungen für die $\zeta_j$ . . . . .	28
2.5 Der Satz von Rav für $s = 3$ . . . . .	28
<b>3 Zerlegung in zwei Stammbrüche</b>	<b>30</b>
3.1 Vorbemerkung . . . . .	30
3.2 Das erste Kriterium . . . . .	30
3.2.1 Folgerungen . . . . .	31
3.3 Das zweite Kriterium . . . . .	32
3.3.1 Eine Darstellung . . . . .	32
3.3.2 Alle Darstellungen . . . . .	33
3.3.3 Anzahl der Darstellungen . . . . .	34
3.4 Synthese der beiden ersten Kriterien . . . . .	36
3.5 Das dritte Kriterium . . . . .	36
3.6 Beispiele . . . . .	37
3.6.1 Ein Vergleich der drei Kriterien in der Anwendung . .	37
3.6.2 Beispiele spezieller Zähler $m$ . . . . .	38
3.7 Die optische Gleichung und Verallgemeinerungen . . . . .	39

<b>4</b>	<b>Zerlegung in drei Stammbrüche</b>	<b>40</b>
4.1	Teilbarkeitsbedingungen . . . . .	40
4.2	Die erste Formel . . . . .	42
4.2.1	Spezialfälle . . . . .	43
4.3	Die zweite Formel . . . . .	44
4.3.1	Spezialfälle . . . . .	45
4.3.2	Zusammenfassung der Spezialfälle . . . . .	46
4.4	Primzahlennenner . . . . .	46
4.4.1	$n = d$ sei eine Primzahl . . . . .	46
4.4.2	$n = z_3$ sei eine Primzahl . . . . .	47
4.4.3	$n = e_3$ sei eine Primzahl . . . . .	49
4.5	Brüche zwischen 1 und 3 . . . . .	50
4.6	Die Fälle $m = 4$ und $m = 5$ . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Die Vermutung von Schinzel für <math>\mathcal{N}_3</math></b>	<b>54</b>
5.1	Der verwendete Algorithmus . . . . .	54
5.2	Die Ergebnisse . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Schlußbemerkung</b>	<b>59</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>60</b>

## Einleitung

Ägyptische Brüche oder Stammbrüche sind Brüche der Form  $\frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . Sie haben ihren Namen von den Ägyptern des Altertums, die eigenartigerweise mit Ausnahme des Bruches  $\frac{2}{3}$  nur solche Stammbrüche kannten. Wahrscheinlich, weil sie die Brüche  $\frac{1}{n}$  als  $n$ -te Teile der Einheit empfanden. Für sie war 1 natürlich kein Stammbruch, sondern eine Zahl. In dieser Arbeit, wie in den meisten neueren Arbeiten zu diesem Thema, sei auch  $\frac{1}{1}$  als Stammbruch bezeichnet.

Wie in Kapitel 1 meiner Arbeit mit Hilfe eines Algorithmus, den Leonardo von Pisa (Fibonacci) schon 1202 fand [Pi,1202], bewiesen wird, läßt sich jede rationale Zahl als endliche Summe von ägyptischen Brüchen darstellen. Die Stammbruchdarstellung der Ägypter ist also unserer modernen Darstellung der rationalen Zahlen ebenbürtig, die Ägypter konnten alle Grundrechenarten mit ihren Brüchen durchführen. Die Addition von Stammbrüchen ist einfach, z. B.  $(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{6} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$ , weitere Umformungen sind hier nicht notwendig. Dagegen ist die Darstellung der rationalen Zahlen nicht eindeutig, daß  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ , ist nicht auf den ersten Blick sichtbar. Auch die Multiplikation ist nicht so leicht.

Die Ägypter ließen in ihren Summen von Stammbrüchen nur paarweise verschiedene Brüche zu. Daß sich jede rationale Zahl auch als endliche Summe verschiedener Stammbrüche darstellen läßt, wird ebenfalls in Kapitel 1 dieser Arbeit gezeigt. Um die Summe zweier gleicher Brüche als Summe verschiedener Brüche darzustellen, benutzten die Ägypter Tabellen, zum Beispiel die  $2/n$ -Tabelle im Papyrus Rhind (vermutlich aus dem Jahr 1565 v. Chr), die eine Zerlegung der Brüche  $\frac{2}{n}$ ,  $5 \leq n \leq 101$ , mit ungeradem  $n$  in Summen von 2 bis 4 verschiedenen Stammbrüchen angibt.

Nach welchem Algorithmus die Ägypter diese Zerlegungen fanden, bzw. ob dieser Tabelle überhaupt ein einheitlicher Algorithmus zugrunde liegt, ist nicht bekannt (siehe dazu den bibliographischen Hinweis am Anfang des Literaturverzeichnisses).

Die Griechen und Araber übernahmen das Rechnen mit Stammbrüchen von den Ägyptern. Fibonacci hat das Rechnen mit ihnen durch seine arabischen Lehrer kennengelernt und sich ausführlich damit beschäftigt. Unabhängig davon wurde Fibonaccis Algorithmus um 1880 von Sylvester [Sy,1880] wiederentdeckt. Gegen Ende des 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts untersuchten einige Mathematiker den Zusammenhang zwischen den Stammbrüchen und aufsteigenden Kettenbrüchen (z. B. [Bor,32a]), worauf ich in dieser Arbeit nicht weiter eingehen werde. Außerdem beschäftigten sich mit

der sogenannten optischen Gleichung  $\frac{1}{n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$ , ihren Anwendungen und ihrer Verallgemeinerung auf beliebig viele Summanden  $\frac{1}{a_i}$  insbesondere italienische Mathematiker zu Beginn unseres Jahrhunderts (siehe auch [Di,20]). Die Fragen, die die optische Gleichung selbst betreffen, sind weitestgehend gelöst, darüber werde ich in Kapitel 2 näheres berichten.

Erdős und Sierpiński vermuteten in den 50iger Jahren unseres Jahrhunderts (z.B.[Si,56]), daß  $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  bzw.  $\frac{5}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  für beliebige  $n > 1$ ,  $x, y, z, \in \mathbf{N}$  möglich ist. Bis heute gibt es dafür keine Beweise. Dies ist wohl das bekannteste ungelöste Problem im Zusammenhang mit ägyptischen Brüchen. Am Ende von Kapitel 1 dieser Arbeit befinden sich Tabellen, die die wesentlichen Forschungsergebnisse zu diesen und ähnlichen bisher unbewiesenen Vermutungen chronologisch darstellen. In Kapitel 4 und 5 werde ich auf einige dieser Probleme näher eingehen.

Erdős untersuchte in den folgenden Jahren häufig Probleme im Zusammenhang mit der Darstellung der 1 als Summe von Stammbrüchen [ErGr,80], welche ich in Kapitel 1 erwähnen werde. In den letzten Jahren wurden hauptsächlich Abschätzungen zur Korrektheit von Verallgemeinerungen der Vermutungen von Erdős und Sierpiński veröffentlicht. Gute Ergebnisse dazu lieferten [Va,70], [Vi,73] und [HoSt,85]. Die Resultate chinesische Mathematiker ([Li,82], [Yan,82] u.a.) waren zunächst schlechter als die der vorher genannten, [Sh,86] konnte jedoch mit einer ähnlichen Methode wie [Vi,73] dessen Ergebnis verbessern. Neueste Abschätzungen zur Größe von Nennern und der Länge von Darstellungen lieferten Yokota ([Yo,82] bis [Yo,90]) und [TeYo,90]. Näheres darüber folgt ebenfalls in Kapitel 1.

Meine Arbeit gliedert sich in 5 Kapitel. Im ersten werde ich die wichtigsten grundlegenden Ergebnisse und ungelösten Probleme über Stammbrüche zusammenstellen. Besonders ausführlich werde ich dabei auf die Darstellung der 1 als Summe von Stammbrüchen eingehen. Dieses Kapitel enthält als eigene Ergebnisse unter anderem einen Algorithmus (die 2/n-Splitting-Methode) zur Zerlegung eines Bruches  $< 1$  in Stammbrüche und den Beweis, daß jeder Bruch  $< 1$ , der als Summe von  $s$  beliebigen positiven Stammbrüchen dargestellt werden kann, auch als Summe  $s$  verschiedener Stammbrüche darstellbar ist. Formeln zur Zerlegung in Stammbrüche enthalten zumeist viele Variablen. Ich habe mich bemüht, durch eine einprägsame und einheitliche Benennung die Formeln übersichtlich zu halten. Notation und Abkürzungsschreibweisen werden auch im ersten Kapitel vorgestellt. Im zweiten Kapitel wird eine Formel für die Zerlegung eines Bruches in 3 Stammbrüche hergeleitet. Sie bildet den Kern vieler folgender Überlegungen.

Daher beginne ich mit ihr den eigentlichen Hauptteil der Arbeit. Die Formel ist in der allgemeinen Form nicht praktisch anwendbar, deswegen findet man sie wohl auch nicht so in der Literatur. Aber sie bietet den Vorteil, daß man viele Spezialfälle leicht ableiten kann. Daher benötige ich dann insbesondere im Kapitel 4, das näher auf die Zerlegung in 3 Stammbrüche eingeht, keine langwierigen Beweise mehr, um Spezialfälle zu erhalten.

Im dritten Kapitel beschäftige ich mich mit der Zerlegung in zwei Stammbrüche, also mit der sogenannten optischen Gleichung. Die meisten Ergebnisse dieses Kapitels findet man bereits in der Literatur. Ich leite drei Kriterien für die Zerlegbarkeit eines Bruches in Stammbrüche her, wobei das zweite Kriterium nicht in der verfügbaren Literatur zu finden ist. Mit denselben Überlegungen wie in Kapitel 2 erhält man das erste Kriterium. Das zweite Kriterium ermöglicht die Angabe aller Darstellungen eines Bruches als Summe zweier ägyptischer Brüche und liefert eine Aussage über die Anzahl der Darstellungen. Zum Schluß dieses Kapitels findet man Beispiele, die einen Vergleich der drei Kriterien erlauben, und außerdem einen Ausblick auf praktische Anwendung der optischen Gleichung und auf ihre Verallgemeinerungen.

Im vierten Kapitel wird wieder die Darstellung eines Bruches als Summe dreier Stammbrüche behandelt. Es werden aus der in Kapitel 2 hergeleiteten Formel Aussagen über Spezialfälle gewonnen. Insbesondere wird dabei auf Brüche mit Primzahlennenner eingegangen. Es werden Restklassen abhängig von einem festen Zähler bestimmt, deren Elemente als Nenner stets darstellbare Brüche liefern. Als Beispiel werden die Zähler 4 und 5 betrachtet.

Im letzten Kapitel schließlich werden die Ergebnisse aus einem Computerprogramm zur Bestimmung der Werte  $\lambda_m$  zusammengestellt. Man vermutet, daß es für jeden festen Zähler  $m$  eine Zahl  $\lambda_m$  gibt, so daß für alle Nenner, die größer als  $\lambda_m$  sind, der Bruch als Summe dreier ägyptischer Brüche darstellbar ist. Mein Programm bestimmt untere Schranken für diese  $\lambda_m$ -Werte für einige Zähler  $m$ . Dazu wird die Darstellbarkeit für Brüche mit diesen Zählern und Nennern bis zu 10 000 geprüft. Der Algorithmus des Programms wird ausführlich beschrieben.

Den Schluß dieser Arbeit bildet ein umfangreiches Literaturverzeichnis, das die in der Arbeit zitierten Titel enthält und zusätzlich noch einige weitere, die in engem Zusammenhang mit den Themen dieser Arbeit stehen oder weiterführende Fragen behandeln.

# 1 Allgemeine Aussagen

In diesem Kapitel werde ich einige grundlegende Aussagen über ägyptische Brüche zusammenstellen, außerdem werden Bezeichnungen festgelegt, die in der gesamten Arbeit gelten sollen.

## 1.1 Festlegungen

Alle Variablen, die mit kleinen deutschen oder griechischen Buchstaben bezeichnet werden, seien bis auf wenige Ausnahmen, auf die ich dann besonders hinweisen werde, natürliche Zahlen, größer als Null.

$(a_1, \dots, a_s)$  sei der größte gemeinsame Teiler von  $a_1, \dots, a_s$ .

Der Bruch  $m/n$  sei vollständig gekürzt.

Die Stammbrüche einer Zerlegung werden in dieser Arbeit meistens mit  $\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_s}$  bezeichnet, also

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_s},$$

wobei sie oft geordnet sind  $a_1 \leq \dots \leq a_s$ .

## 1.2 Existenz von Darstellungen für $m/n$

Zunächst wird gezeigt, daß alle rationalen Zahlen auf unendlich viele verschiedene Weisen als endliche Summen verschiedener ägyptischer Brüche darstellbar sind.

**Satz 1** *Jede rationale Zahl  $\frac{m}{n}$ ,  $0 < m \leq n$ , ist als Summe von maximal  $m$  verschiedenen Stammbrüchen darstellbar.*

Beweis: Der Standardbeweis dieses Satzes (z. B. [Si,56], [Sal,47]) erfolgt mit dem *Fibonacci-Sylvester-Algorithmus*, welcher lautet:

Subtrahiere von einem Bruch den größtmöglichen Stammbruch, d.h. den mit dem kleinsten Nenner, so daß die Differenz größer oder gleich Null ist. Ist die Differenz größer als Null, so wiederhole das Verfahren mit dem Differenzbruch.

Sei  $n = mt_1 - r_1$ ,  $0 \leq r_1 < m$ , dann ist laut Algorithmus zunächst  $\frac{m}{n} - \frac{1}{t_1}$  zu bilden, denn für beliebiges  $a_1$  gilt

$$\frac{m}{mt_1 - r_1} - \frac{1}{a_1} > 0 \iff a_1 > \frac{mt_1 - r_1}{m} = t_1 - \frac{r_1}{m} \implies a_1 \geq t_1.$$

Wegen  $r_1 < m$  ist  $a_1 = t_1$  die kleinstmögliche Wahl.

Im ersten Schritt erhält man somit

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{t_1} = \frac{m}{mt_1 - r_1} - \frac{1}{t_1} = \frac{mt_1 - mt_1 + r_1}{nt_1} = \frac{r_1}{nt_1}$$

und im  $i$ -ten Schritt entsprechend

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_i} + \frac{r_i}{t_1 t_2 \cdots t_i n}$$

mit  $nt_1 \cdots t_{i-1} = t_i r_{i-1} - r_i$ ,  $0 \leq r_i < r_{i-1}$ .

Da die  $r_i$  streng monoton fallen und da  $r_1 < m$ , terminiert der Algorithmus nach maximal  $m$  Schritten. Aus  $nt_1 \cdots t_i = t_{i+1} r_i - r_{i+1}$  folgt  $nt_1 \cdots t_i \leq t_{i+1} r_i < t_{i+1} n$ , also  $t_1 \cdots t_i < t_{i+1}$ , deshalb sind alle Stammbrüche  $1/t_1, \dots, 1/t_{i+1}$ , die der Algorithmus liefert, verschieden.  $\diamond$

Dieser Algorithmus wurde schon im Jahr 1202 von *Leonardo von Pisa (Fibonacci)* [Pi,1202] in seinem Liber abaci beschrieben, von *Sylvester* [Sy,1880] wurde er 1880 wiederentdeckt. Solch ein Algorithmus, der in jedem Schritt einen maximalen Wert wählt, heißt auch *Greedy-Algorithmus* bzw. gieriger Algorithmus. Ich werde ihn in Abschnitt 1.6. mit anderen Algorithmen vergleichen.

Daß der Fibonacci-Sylvester-Algorithmus terminiert, ist nicht selbstverständlich. Falls man für  $n$  und die  $t_i$  nur ungerade Zahlen zuläßt, ist nicht bekannt, ob er stets abbricht [ErGr,80]. (Jedoch läßt sich jeder Bruch mit ungeradem Nenner als endliche Summe verschiedener Stammbrüche mit ungeraden Nennern darstellen, wie zum Beispiel [Br,54], [Ste,54], [Alli,63] und [Gr,64] zeigen.) Außerdem kann man eine Menge  $M$  so definieren, daß alle positiven rationalen Zahlen auf unendlich viele verschiedene Arten als Summen  $\sum_{i=1}^s \frac{1}{t_i}$ ,  $t_i \in M$  dargestellt werden können, aber die Menge der rationalen Zahlen, für die der Fibonacci-Sylvester-Algorithmus nicht terminiert, falls alle Nenner aus  $M$  sind, dicht in  $\mathbf{R}^+$  ist (siehe [ErGr,80]).

Auch rationale Zahlen  $> 1$  lassen sich als Summe von Stammbrüchen darstellen.

**Satz 2** Jede rationale Zahl  $\frac{m}{n} > 0$  ist als Summe endlich vieler verschiedener Stammbrüche darstellbar.

Beweis: Die harmonische Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$  ist divergent. Man findet daher ein  $s$ , so daß  $\frac{m'}{n'} := \frac{m}{n} - \sum_{i=1}^s \frac{1}{i} < \frac{1}{s+1}$ . Wegen  $\frac{m'}{n'} < 1$  ist dieser Bruch nach



Satz 1 als endliche Summe verschiedener Stammbrüche mit Zähler  $> s + 1$  darstellbar. Alle Stammbrüche dieser Darstellung von  $\frac{m}{n}$  sind offensichtlich verschieden.  $\diamond$

Da die harmonische Reihe sehr langsam divergiert, benötigt man jedoch laut [Si,56] schon für die Darstellung von  $\frac{10}{1}$  mehr als 12 365 Brüche! Die Darstellung eines Bruches als Summe von Stammbrüchen ist nicht eindeutig.

**Satz 3** *Jede rationale Zahl  $\frac{m}{n} > 0$  besitzt unendlich viele paarweise verschiedene endliche Zerlegungen in Summen von ägyptischen Brüchen.*

Beweis: Aus einer Zerlegung gewinnt man eine neue dadurch, daß man einen Stammbruch mithilfe der Identität

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)} \quad (1)$$

durch zwei Stammbrüche ersetzt.  $\diamond$

Für jedes feste  $s$  gibt es allerdings nur endlich viele verschiedene Zerlegungen eines Bruches  $\frac{m}{n}$  in  $\frac{m}{n} = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_s}$ , denn falls  $a_1 \leq \dots \leq a_s$ , so kann man für jedes  $a_i$  die Schranke

$$\frac{1}{\frac{m}{n} - \frac{1}{a_1} - \dots - \frac{1}{a_{i-1}}} \leq a_i \leq \frac{s-i+1}{\frac{m}{n} - \frac{1}{a_1} - \dots - \frac{1}{a_{i-1}}}$$

angeben. Die Abschätzung nach oben entsteht dabei aus der Überlegung, daß  $a_i$  dann maximal wäre, wenn  $a_i = a_{i+1} = \dots = a_s$  angenommen werden können, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{i-1}} + (s-i+1) \frac{1}{a_i} \implies \\ \frac{1}{a_i} &= \frac{\frac{m}{n} - \frac{1}{a_1} - \dots - \frac{1}{a_{i-1}}}{s-i+1} \end{aligned}$$

### 1.3 Darstellung mit verschiedenen Nennern

Aus Gleichung (1) kann man einen Algorithmus, der nach [Ste,64] und [Bl,68] *Splitting-Methode* genannt wird, ableiten. Man zerlegt  $\frac{m}{n}$  in  $m$  Brüche  $\frac{1}{n}$ ,  $m - 1$  davon verwandelt man mit Hilfe von (1). Von den je  $m - 1$  gleichen

Brüchen, die man dabei erhält, verwandelt man wieder  $m - 2$  mit Hilfe von (1) und so fort. Zum Beispiel:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{56} + \frac{1}{8} + \frac{1}{56} = \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{56} + \frac{1}{9} + \frac{1}{72} + \frac{1}{57} + \frac{1}{3192}$$

Erst 1977 gelang es [Cam,77] zu zeigen, daß dieser Algorithmus abbricht. Einen besseren Algorithmus, der statt (1) folgende Gleichung (2) zugrunde legt, habe ich daraus entwickelt

$$\frac{2}{k} = \begin{cases} \frac{1}{\frac{k}{2}+1} + \frac{1}{(\frac{k}{2}+1)\frac{k}{2}} = \frac{1}{\frac{k}{2}} & \text{falls } k \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{1}{\frac{k+1}{2}} + \frac{1}{k(\frac{k+1}{2})} & \text{falls } k \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \quad (2)$$

Man zerlegt wie in der Splitting-Methode  $\frac{m}{n}$  in  $m$ -mal  $\frac{1}{n}$ . Nun verwandelt man stets mit (2) je zwei gleiche Brüche in zwei verschiedene, falls  $k$  ungerade ist, bzw. in einen Bruch, falls  $k$  gerade ist. Allerdings ist der Algorithmus so nur für  $\frac{m}{n} < 1$  anwendbar, da (2)  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  liefert. Ich werde dies die *2/n-Splitting-Methode* nennen. (Gleichung (2) findet man zum Beispiel in [Je,83].)

Ein Vorteil gegenüber der Splitting-Methode besteht darin, daß sich die Anzahl der zur Zerlegung benötigten Stammbrüche nicht erhöht. Zum Beispiel:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

Falls dieser Algorithmus terminiert, so läßt sich jeder mit  $s$  beliebigen Stammbrüchen darstellbare Bruch auch mit  $s$  verschiedenen Stammbrüchen darstellen. Bevor ich dies näher untersuche, werde ich einige abkürzende Bezeichnungen einführen.

**Definition 1** *Mit*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_s &:= \left\{ \frac{m}{n} : \bigvee_{a_1, \dots, a_s \in \mathbf{N}} \frac{m}{n} = \pm \frac{1}{a_1} \pm \dots \pm \frac{1}{a_s} \right\} \\ \mathcal{N}_s &:= \left\{ \frac{m}{n} : \bigvee_{a_1, \dots, a_s \in \mathbf{N}} \frac{m}{n} = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_s} \right\} \\ \mathcal{V}_s &:= \left\{ \frac{m}{n} : \bigvee_{a_1, \dots, a_s \in \mathbf{N}} \frac{m}{n} = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_s}, a_1 < a_2 < \dots < a_s \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

werden die Mengen von Brüchen bezeichnet, die jeweils in Summen von  $s$  beliebigen, positiven oder verschiedenen positiven Stammbrüchen zerlegt werden können.

Die Bezeichnungen der Mengen leiten sich von ganzzahlig, natürlich und verschieden ab.

Aus diesen Definitionen folgen sofort:

$\mathcal{V}_s \subset \mathcal{N}_s \subset \mathcal{Z}_s$  und  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_m$ , da stets die Darstellung  $\frac{m}{n} = m \frac{1}{n}$  möglich ist.

Für  $m \leq n$  gilt nach Satz (1) stets  $\frac{m}{n} \in \mathcal{V}_m$ .

$\frac{m}{n} > s \Rightarrow \frac{m}{n} \notin \mathcal{N}_i, i \leq s$ .

Für  $\frac{m}{n} \neq 1$  folgt aus  $\frac{m}{n} \in \mathcal{V}_s$  auch  $\frac{m}{n} \in \mathcal{V}_{s+1}$ , wie aus dem Beweis zu Satz 3 ersichtlich ist. Für  $\frac{m}{n} = 1$  liefert (1)  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ , also keine Zerlegung in verschiedene Stammbrüche. Näheres dazu in Abschnitt 1.4.

Für einen Bruch  $< 1$  gilt sogar, falls der Bruch überhaupt als Summe von  $s$  Stammbrüchen darstellbar ist, dann ist er auch als Summe  $s$  verschiedener Stammbrüche darstellbar.

**Satz 4** Für  $m < n$  gilt

$$\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_s \Rightarrow \frac{m}{n} \in \mathcal{V}_s$$

Beweis: Der Beweis wird durch vollständige Induktion über  $s$  geführt.

Induktionsanfang:  $s = 1$  ist trivial, für  $s = 2$  folgt die Behauptung unmittelbar aus (2).

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für  $s - 1$ .

Induktionsschluß: Der Induktionsschluß wird von  $s - 1$  nach  $s$  geführt. In  $\frac{m}{n} = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_s}$ ,  $\frac{m}{n} < 1$ , gilt  $a_h > 1$ ,  $h \in \{1, \dots, s\}$ . Sei o.B.d.A.  $a_1 = \min\{a_1, \dots, a_s\}$ , dann gibt es nach Induktionsvoraussetzung  $s - 1$

paarweise verschiedene  $a'_i$ ,  $i \in \{2, \dots, s\}$  mit  $\frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_s} = \frac{1}{a'_2} + \dots + \frac{1}{a'_s}$ .

Falls alle  $a'_i$  von  $a_1$  verschieden sind, ist man fertig, ansonsten existiert ein  $k$ ,  $2 \leq k \leq s$ , mit  $a_1 = a'_k$ , und es gilt  $a'_{min} := \min\{a'_2, \dots, a'_s\} \leq a_1$ . Man unterscheidet zwei Fälle:

(i) Falls  $a'_{min} < a_1$ , so sei  $a'_1 := a'_{min}$ .

(ii) Falls  $a'_{min} = a_1$ , so gilt  $a'_{min} > 2$  (sonst wäre  $\frac{1}{a'_{min}} + \frac{1}{a_1} \geq 1$ ), also kann man  $\frac{2}{a'_{min}}$  nach (2) in zwei verschiedene Brüche zerlegen.  $\frac{1}{a'_1}$  sei der

größere Bruch, den man dabei erhält, also  $a'_1 := \frac{a'_{min}}{2} + 1$  falls  $a'_{min}$  gerade,

$a'_1 := \frac{a'_{min} + 1}{2}$  falls  $a'_{min}$  ungerade.

In beiden Fällen gibt es nach Induktionsvoraussetzung wieder paarweise verschiedene  $a_i''$  mit  $\frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_s} = \frac{1}{a_2''} + \dots + \frac{1}{a_s''}$ . Es gilt  $a_1' < a_1$ . Falls wieder ein  $k'$ ,  $2 \leq k' \leq s$  existiert, mit  $a_{k'}'' = a_1'$  so wiederhole man (i) bzw. (ii) mit diesem. Man erhält dann ein  $a_1'' < a_1'$ . Da die  $a_1, a_1', a_1'', \dots$  monoton fallen und alle größer als 1 sind, terminiert dieses Verfahren.  $\diamond$

Damit ist auch gezeigt, daß die 2/n-Splitting-Methode, die ja nur für  $\frac{m}{n} < 1$  definiert ist, abbricht, falls man wie im Beweis verfährt.

#### 1.4 Darstellung der 1

Satz 4 gilt nur für  $\frac{m}{n} < 1$ . Für  $\frac{m}{n} = 1$  gilt nach [Si,56]

**Satz 5** *Es gilt  $1 \in \mathcal{N}_s$  für  $s \geq 1$  und  $1 \in \mathcal{V}_s$  für  $s \geq 1$ ,  $s \neq 2$ .*

Beweis:  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ , eine Darstellung mit zwei verschiedenen Stammbrüchen ist offensichtlich nicht möglich.

Wendet man Formel (1) mehrfach an, so erhält man

$$1 = \frac{1}{u_1 + 1} + \frac{1}{u_2 + 1} + \dots + \frac{1}{u_{s-1} + 1} + \frac{1}{u_s} \quad (4)$$

mit  $u_1 = 1$ ,  $u_{k+1} = u_k(u_k + 1)$ . Dies liefert für jedes  $s \geq 3$  eine Darstellung der 1 als Summe von  $s$  verschiedenen Stammbrüchen.  $\diamond$

Für  $\frac{m}{n} > 1$  folgt aus  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_s$  in der Regel nicht  $\frac{m}{n} \in \mathcal{V}_s$ , zum Beispiel ist  $10 \in \mathcal{N}_{10}$ , aber  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{12365} < 10$ , so daß  $10 \notin \mathcal{V}_s$ ,  $s \leq 12365$ .

Gleichung (4) geht auf [Ke,21] zurück, der vermutete, daß stets  $u_s = \max\{a_s \mid \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_s} = 1, a_1 \leq \dots \leq a_s\}$  gilt, welches von [Cu,22] bewiesen wurde.

Dies bedeutet, daß  $R_s := \sum_{k=1}^s \frac{1}{u_k + 1}$  die beste Näherung von 1 durch eine Summe von maximal  $s$  Stammbrüchen  $\leq 1$  ist. Die Folge  $(R_s)_{s \in \mathbb{N}}$  wird durch einen Greedy-Algorithmus gebildet, insofern man in  $1, 1 - R_1, 1 - R_2, \dots$  stets den größtmöglichen Stammbruch subtrahiert.

Die  $u_s$  werden schnell sehr groß. Es gilt  $u_s = \lfloor c_0^{2^s} \rfloor$ ,  $c_0 = 1,264085\dots$ , nach [ErGr,80], so daß die Vermutung aus [Ke,21] anschaulich klar ist. Für Näherungen  $R_s$  anderer rationaler Zahlen fanden [Er,50] und [ErGr,80] ähnliche Ergebnisse.

Es gibt viele weitere Ergebnisse und offene Probleme im Zusammenhang mit der Darstellung der 1 als Summe von Stammbrüchen. Einige will ich hier

kurz ansprechen, weitere findet man in [ErGr,80] (aber Vorsicht in jener Arbeit sind in mehreren Formeln Druckfehler!).

- Eine Abschätzung für  $N(s)$ , die Anzahl der Lösungen  $\{x_1, \dots, x_s\}$  von  $1 = \sum \frac{1}{x_i}$ , suchen [ErGr,80] und [AhSl,73]. [Bs,74b] zeigt für  $x_1 < \dots < x_s$  gilt  $N(s) \geq \frac{1}{2}(s-1)! + 2^{s-1} - 2$ .
- In der Darstellung  $1 = \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_s}$ ,  $x_1 \leq \dots \leq x_s$  gilt  $2 \leq x_1 \leq s$  und  $s \leq x_s \leq u_s$ , in der Darstellung mit  $x_1 < \dots < x_s$  gilt  $2 \leq x_1 \leq \frac{s}{e-1}$ ,  $\frac{es}{e-1} \leq x_s \leq u_s$ . Ob  $\max x_1 = (1+O(1))\frac{s}{e-1}$  und  $\min x_s = (1+O(1))\frac{es}{e-1}$  richtig ist, ist laut [Er,74] bisher nicht bekannt.
- Gilt in den Darstellungen der 1 als Summe von  $s$  Stammbrüchen  $\lim_{s \rightarrow \infty} \min \frac{x_s}{x_1} = e$  und  $\max(x_{k+1} - x_k) \geq 3$ , fragt Erdős in [Er,50] und [ErGr,80];  $\max(x_{k+1} - x_k) > 1$  ist bekannt,  $\max(x_{k+1} - x_k) = 3$  wird in  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$  angenommen.
- Laut Nelson [Kie,76] gibt es genau folgende 5 Darstellungen der 1 als Summe neun verschiedener Stammbrüche mit ungeradem Nenner, dabei ist der größte Nenner nie kleiner als 231

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{45} + \frac{1}{231}, \\
 1 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{135} + \frac{1}{10395}, \\
 1 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{165} + \frac{1}{693}, \\
 1 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{231} + \frac{1}{315}, \\
 1 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{33} + \frac{1}{45} + \frac{1}{385}.
 \end{aligned}$$

Weniger als neun Summanden genügen nicht. [Kie,76] zeigt, daß der kleinste Nenner  $a_s$ , falls  $1 < a_1 < \dots < a_s$ , bei beliebiger Anzahl von Summanden  $a_s = 105$  ist.

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{33} + \frac{1}{35} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} + \frac{1}{77} + \frac{1}{105}$$

[Ga,78] fragt nach solchen Darstellungen für 2, falls der Summand  $\frac{1}{1}$  nicht verwendet werden soll.

- Bartoš [Ba,77] gibt ein Beispiel für  $1 = \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_{101}}$ ,  $x_1 < \dots < x_{101}$ , so daß jedes  $x_i$  das Produkt zweier verschiedener Primzahlen ist. [Bur,73] liefert ein Beispiel für  $1 = \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_{79}}$ ,  $x_1 < \dots < x_{79}$ , wobei kein  $x_i$  ein anderes teilt. Sind in diesen beiden Fällen 101 bzw. 79 die minimalen Anzahlen?
- Bende [Bd,67] untersucht die Anzahl  $\tau(s)$  der Lösungen von  $1 = \sum \frac{1}{2^{x_i}}$ ,  $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_s$ . [Boy,75] zeigt, daß  $\tau(s) = \alpha \lambda^s + O(\mu^s)$ ,  $\alpha = 0,141\dots$ ,  $\lambda = 1,794\dots$  und  $\mu \leq 1,55$ .

### 1.5 $\mathcal{N}_s$ ist nicht dicht in $\mathbb{Q}^+$

Für jede rationale Zahl  $\frac{m}{n}$  gibt es ein  $s$ , so daß  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_s$ . Gibt es vielleicht ein sehr großes  $s$ , so daß alle rationalen Zahlen  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_s$ ? Daß dies nicht einmal für Intervalle rationaler Zahlen möglich ist, werde ich im folgenden darlegen. Alle Aussagen dieses Abschnitts kann man auch auf  $\mathcal{V}_s$  und  $\mathcal{Z}_s$  übertragen.

Das *Theorem von Mycielski* [Hol,65] besagt, daß es in jeder nicht leeren Teilmenge von  $\mathcal{N}_s$  ein größtes Element  $\frac{m}{n}$  gibt, woraus folgt, daß es keine unendliche streng monoton wachsende Folge in  $\mathcal{N}_s$  gibt.

Aus Abschnitt 1.4 folgt zum Beispiel, daß das dort definierte  $R_s$  das größte Element in  $(0, 1) \cap \mathcal{V}_s$  ist, das heißt die größte rationale Zahl  $< 1$ , die als Summe von maximal  $s$  verschiedenen Stammbrüchen dargestellt werden kann. [Sel,78] zeigt allgemein  $R'_s = \max\{(0, T) \cap \mathcal{V}_s\}$ , falls  $T = \frac{p}{q}$  eine rationale Zahl,  $q \equiv -1 \pmod{p}$ ,  $u_1 := \frac{p+1}{q} - 1$ ,  $u_2 := qu_1$ ,  $u_{k+1} := u_k(u_k + 1)$ ,  $k \geq 2$  und  $R_s = \sum_{k=1}^s \frac{1}{u_k+1}$ .

(Sortiert man andererseits alle rationalen Zahlen  $m/n$  zwischen 0 und 1 nach der Größe von  $m+n$  und  $m$ , also  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \dots$ , so ist  $2/3$  die kleinste Zahl  $\notin \mathcal{V}_1$ ,  $4/5$  die kleinste  $\notin \mathcal{V}_2$  und  $8/11$  die kleinste  $\notin \mathcal{V}_3$ . Für  $s > 3$  sind nach [Gu,85] solche Werte bisher nicht bekannt.)

Es gibt zwar keine monoton wachsenden unendlichen Folgen, die ganz in  $\mathcal{N}_s$  liegen, aber es gibt unendliche streng monoton fallende Folgen, die ganz in  $\mathcal{N}_s$  liegen, zum Beispiel konvergiert die Folge  $\left(\frac{k+1}{kn}\right)_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $1/n$ , und es gilt stets  $\frac{k+1}{kn} = \frac{1}{n} + \frac{1}{kn}$ , also  $\frac{k+1}{kn} \in \mathcal{N}_2$ . Aus dem Theorem von Mycielski folgt:

**Satz 6** Für jedes fest vorgegebene  $s$  gibt es in jedem Intervall aus  $\mathbb{Q}$  Zahlen  $m/n$  mit  $m/n \notin \mathcal{N}_s$

Beweis: Sei  $\left(\frac{m_0}{n_0}, \frac{m_1}{n_1}\right)$  ein Intervall in  $\mathbf{Q}$ , dann ist  $\left(\frac{km_1-1}{kn_1}\right)_{k \in \mathcal{N}}$  eine streng monoton wachsende Folge, die gegen  $\frac{m_1}{n_1}$  konvergiert. Wegen  $\frac{m_0}{n_0} < \frac{m_1}{n_1}$  muß es ein Folgenglied geben, das größer als  $\frac{m_0}{n_0}$  ist, so daß alle größeren Folgenglieder im Intervall liegen. Nach dem Theorem von Mycielski liegen die Folgenglieder ab einem  $\frac{m'}{n'}$  nicht mehr in  $\mathcal{N}_s$ , so daß es also in diesem Intervall Zahlen gibt, die nicht in  $\mathcal{N}_s$  liegen.  $\diamond$

Mit anderen Worten  $\mathcal{N}_s$  ist nicht dicht in  $\mathbf{Q}^+$ . Dies gilt somit auch für  $\mathcal{V}_s$ , für  $\mathcal{Z}_s$  kann man es auf ähnliche Art beweisen.

## 1.6 Algorithmen

Bisher habe ich in diesem Kapitel drei Algorithmen genannt, mit deren Hilfe man den Bruch  $\frac{m}{n}$  in eine Summe von Stammbrüchen zerlegen kann, den Fibonacci-Sylvester-Algorithmus, die Splitting-Methode und die 2/n-Splitting-Methode. Weitere folgen in diesem Abschnitt. Zunächst werde ich jedoch zwei Kriterien vorstellen, die es erlauben, Algorithmen zu vergleichen.

Eine „minimale“ Darstellung eines Bruches  $\frac{m}{n}$  als Summe von Stammbrüchen wäre eine, bei der möglichst wenig Summanden benötigt werden (*Längenkriterium*) und der größte auftretende Nenner möglichst klein ist (*Nennerkriterium*). Formal definieren [BlEr,76] und [Yo,86/88]

$$D(m, n) := \min \left\{ a_s, \frac{m}{n} \in \mathcal{V}_s \right\}, \quad L(m, n) := \min \left\{ s, \frac{m}{n} \in \mathcal{V}_s \right\}$$

D steht für denominator, L für length,  $a_s$  bezeichnet den größten Nenner einer Darstellung eines Bruches als Summe von  $s$  Stammbrüchen. Ein Maßstab für die Güte einer Darstellung ist der Vergleich der Werte  $s$  und  $a_s$  mit

$$L(n) := \max_{1 \leq m < n} L(m, n) \quad \text{und} \quad D(n) := \max_{1 \leq m < n} D(m, n),$$

also der maximalen Länge und Nenner aller Brüche  $\frac{m}{n} < 1$  für festes  $n$ . Es zeigten [Er,50] (untere Schranke in der folgenden Ungleichung) und [Vos,85] (obere Schranke), daß Konstanten  $c$  und  $d$  existieren mit

$$c \log_2 n < L(n) < d \sqrt{\log n}.$$

[BlEr,76] (untere Schranke) und [Yo,88b] (obere Schranke) bewiesen

$$p \frac{\log p \log_2 p}{\left(\prod_{j=4}^{k+1} \log_j p\right) \log_{k+1} p} \leq D(p) \leq p \log p (\log_2 p)^5$$

mit  $k \geq 4$  und einer Primzahl  $p$  mit  $\log_{2^r} p \geq 1$ . Hierbei sei  $\log_1 := \log$  und  $\log_j := \log(\log_{j-1})$ . Die obere Grenze für  $D(p)$  liefert nach [Yo86] auch eine obere Grenze für  $D(n)$ , denn es gilt  $\frac{D(n)}{n} \leq \frac{D(p)}{p}$  falls  $p$  eine Primzahl ist, die  $n$  teilt. Solche Abschätzungen beweist man dadurch, daß man Algorithmen entwickelt, die diese Werte für  $s$  und  $a_s$  liefern.

In vielen Fällen ist es nicht möglich, eine Darstellung von  $\frac{m}{n}$  zu finden, in der sowohl  $D(m, n)$  als auch  $L(m, n)$  angenommen werden. Zum Beispiel gilt, wie man leicht nachrechnet,  $L(3, 7) = 3$ . In

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}$$

nimmt  $a_3 = 28$  den minimalen Wert für  $\frac{3}{7} \in \mathcal{V}_3$  an, dagegen existiert für  $\frac{3}{7} \in \mathcal{V}_4$  die Darstellung

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21},$$

so daß  $D(3, 7) \leq 21 < 28$ . Es gibt keine Darstellung von  $\frac{3}{7}$  als Summe dreier Stammbrüche mit dem größten Nenner  $a_3 = 21$ .

Man versucht nun Algorithmen zu entwickeln, die gleichzeitig kleines  $s$  und kleines  $a_s$  liefern. [Yo,86/88] zeigt, daß es keinen Algorithmus gibt, der  $L(p) \leq \frac{c \log p}{\log_2 p}$  und  $D(p) \leq p(\log p)^{1+\frac{1}{c}-\epsilon}$  mit Konstanten  $c$  und  $\epsilon$  und einer großen Primzahl  $p$  erreicht. Aber er entwickelt einen Algorithmus, der  $L(n) \leq \frac{\lambda \log n}{\log_2 n}$  und  $D(n) \leq n(\log n)^{2+\delta}$  erreicht, wobei  $\lambda$  und  $\delta$  Funktionen von  $n$  mit  $\lambda \rightarrow 2$  und  $\delta \rightarrow 0$  für  $N \rightarrow \infty$  sind.

Die beste Abschätzung findet man in [TeYo,90]. Sie lautet:

**Satz 7** Für  $\epsilon > 0$  gibt es eine reelle Zahl  $n_0(\epsilon)$ , so daß für alle  $a, n > n_0$ ,  $1 \leq a < n$ ,  $\frac{a}{n}$  eine Darstellung als Summe ägyptischer Brüche besitzt mit

$$s \leq (1 + \epsilon) \frac{\log n}{\log_2 n}, \quad a_s \leq 4n(\log n)^2 \log_2 n.$$

Für den Vergleich von Algorithmen gibt es Standardbeispiele (z. B.  $\frac{3}{7}$  und  $\frac{5}{121}$ ), die viele Autoren, [BlEr,76], [Bl,68], [Ste,64], [Re,81] und andere, verwenden. Ich habe außerdem das Beispiel  $\frac{5}{31}$  gewählt. Die folgenden Darstellungen habe ich zum Teil den 4 eben genannten Schriften entnommen, zum Teil selbst berechnet. Insbesondere  $\frac{5}{121}$  hat eine gewisse Berühmtheit erlangt, nachdem [Bl,68] offengelassen hatte, welches  $D(5, 121)$  und  $L(5, 121)$



sind. Mit Sätzen aus Kapitel 3 folgt  $\frac{5}{121} \notin \mathcal{N}_2$ . [Liu,84] beweist, daß es genau 21 Darstellungen von  $\frac{5}{121}$  als Summe dreier Stammbrüche gibt. Es gilt

$$L(3, 7) = L(5, 31) = L(5, 121) = 3$$

und

$$D(3, 7) \leq 21, \quad D(5, 31) \leq 248, \quad D(5, 121) \leq 363.$$

$L(3, 7) > 2, L(5, 31) > 2, L(5, 121) > 2$  folgt jeweils aus Kapitel 3. Ansonsten gibt es die Darstellungen

$$\frac{5}{31} = \frac{1}{8} + \frac{1}{31} + \frac{1}{248}$$

und

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363}.$$

Die Darstellungen von  $\frac{3}{7}$  siehe oben.

### 1.6.1 Der Fibonacci-Sylvester-Algorithmus

Für den Fibonacci-Sylvester-Algorithmus gilt  $s \leq m$  nach Satz 1. Für große Werte von  $n$  ist  $L(m, n)$  jedoch oft sehr viel kleiner als  $m$ . [Ma,87] nennt eine Reihe von Beispielen, in denen der Algorithmus diesen schlechtesten Fall, die Darstellung als Summe von  $m$  Stammbrüchen, annimmt, obwohl es kürzere Darstellungen gibt.

Für meine drei Beispiele liefert der Algorithmus

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$$

$$\frac{5}{31} = \frac{1}{7} + \frac{1}{55} + \frac{1}{3979} + \frac{1}{23744683} + \frac{1}{23744683 \cdot 4789365}$$

und

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{25} + \frac{1}{757} + \frac{1}{763309} + \frac{1}{873960180913} + \frac{1}{1527612795642093418846225}.$$

Der große Nachteil des Fibonacci-Sylvester-Algorithmus wird in diesen Beispielen deutlich, er liefert exponentiell wachsende Nenner. Denn es gilt  $a_i > a_1 \cdot \dots \cdot a_{i-1}$ ,  $1 \leq i < s$ , nach dem Beweis zu Satz 1. Außerdem erreicht er  $L(m, n)$  in meinen drei Beispielen nur in einem Fall. Dies ist oft das Problem eines greedy-Algorithmus, er wählt bei jedem Schritt das Maximum (hier den größtmöglichen Stammbruch), berücksichtigt dabei jedoch weder vorhergehende noch folgende Schritte, so daß er das globale Optimum häufig nicht erreicht.

### 1.6.2 Die Splitting-Methode und die 2/n-Splitting-Methode

Die Splitting-Methode hat im wesentlichen beweistechnische Bedeutung (zum Beispiel im Beweis von Satz 3). Sie ist kein geeigneter Algorithmus, da sie, wie man leicht nachrechnet, Summen von mindestens  $2^m - 1$  Stammbrüchen liefert und auch die Nenner recht groß werden läßt (vergleiche das Beispiel in Abschnitt 1.2).

Die 2/n-Splitting-Methode ist nur für  $\frac{m}{n} < 1$  definiert, sie liefert  $s \leq m$  wie der Fibonacci-Sylvester-Algorithmus in bezug auf  $D(m, n)$  ist sie zumeist besser als letzterer.

So gilt für meine Beispiele

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}$$

$$\frac{5}{31} = 5 \cdot \frac{1}{31} = \frac{1}{31} + 2 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{496} = \frac{1}{31} + \frac{1}{8} + \frac{1}{248}$$

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{12} + \frac{1}{31} + \frac{1}{1891} + \frac{1}{3691} + \frac{1}{27243271}.$$

Die Darstellungen für  $\frac{3}{7}$  und für  $\frac{5}{31}$  sind sehr gut. Die Ursache dafür liegt darin, daß man im ersten Schritt gerade Nenner erhält und somit kürzen kann. Für  $\frac{5}{12}$  ist dies nicht der Fall, dennoch ist die 2/n-Splitting-Methode hier besser als der Fibonacci-Sylvester-Algorithmus.

### 1.6.3 Multiplikationsalgorithmen

Multiplikationsalgorithmen beruhen auf einer Formel, die zuerst von Rav [Ra,66] gefunden wurde und die ich für  $s = 3$  in Kapitel 2 dieser Arbeit vollständig beweisen werde.

**Satz 8 (Rav)**

$$\frac{m}{n} \in \mathcal{V}_s \iff$$

$$\bigvee_{M, N, N_1, \dots, N_s} \frac{M}{N} = \frac{m}{n}, \bigwedge_{1 \leq i \leq s} N_i \mid N, (N_1, \dots, N_s) = 1,$$

$$N_1 + \dots + N_s = 0 \pmod{M}, N_1 < N_2 < \dots < N_s$$

[We,75a] zeigt, daß man die Bedingung  $(N_1, \dots, N_s) = 1$  auch fortlassen kann und  $N_1 + \dots + N_s = 0 \pmod M$  durch  $N_1 + \dots + N_s = M$  ersetzen kann. Beweis der einen Beweisrichtung des Satzes: Die eine Implikation ist trivial, denn falls  $N_1 + \dots + N_s = kM$ , so gilt

$$\frac{m}{n} = \frac{M}{N} = \frac{N_1 + \dots + N_s}{kN} = \frac{1}{\frac{kN}{N_1}} + \dots + \frac{1}{\frac{kN}{N_s}}$$

und  $N_i \mid N$  war vorausgesetzt. Offensichtlich folgt aus der Verschiedenheit der  $N_i$  auch die Verschiedenheit der  $a_i$ .

Die andere Implikation ist nicht so einfach.  $\diamond$

Für  $m < n$  läßt sich folgender Algorithmus ableiten: Man erweitere  $\frac{m}{n}$  solange mit  $k!$  bis man den Zähler als Summe von verschiedenen Teilern des Nenners darstellen kann. Falls es mehrere solche Darstellungen gibt, wähle man die, bei der das kleinste  $N_i$  möglichst groß ist, damit  $N/N_i$  möglichst klein wird, man somit nahe an  $D(m, n)$  herankommt.

Dann bilde man  $\frac{M}{N} = \frac{N_1}{N} + \dots + \frac{N_s}{N}$  und kürze. Führt man diesen Algorithmus für  $1 \leq k \leq n(n-1)$  durch, so befindet sich nach [Cam,78] unter allen Darstellungen, die man bis dahin erhalten hat, diejenige, in der  $D(m, n)$  angenommen wird. Nach Campbell gilt weiterhin  $s < 2k - 1$  mit  $(k-1)! \leq n \leq k!$ .

Dieser Algorithmus wurde zum Beispiel von [Woh,72] entwickelt. [Cam,78] nennt ihn Fakultäts-Algorithmus, da mit  $k!$  multipliziert wird. Ebenso erhält man nach [Cam,78] den Potenzen-von-Zwei-Algorithmus, wenn man  $\frac{m}{n}$  statt mit  $k!$  mit Potenzen von Zwei erweitert. Laut Campbell hat Fibonacci außer dem Fibonacci-Sylvester-Algorithmus auch solch einen Algorithmus entwickelt, nämlich die Erweiterung von  $\frac{m}{n}$  mit Potenzen von 12. Fibonacci habe aber eigentlich keine strengen Algorithmen befolgt, für ihn waren dies nur Methoden, die in beliebiger Abwandlung und Kombination auf konkret gegebene Brüche angewendet werden konnten. Zerlegungen in Summen von Stammbrüchen zu finden sei für ihn eine Kunst gewesen.

Hier folgen wieder meine Beispiele:

a) Fakultäts-Algorithmus

$$\frac{3}{7} = \frac{18}{42} = \frac{14 + 3 + 1}{42} = \frac{1}{42} + \frac{1}{14} + \frac{1}{3} = \frac{7 + 6 + 3 + 2}{42} = \frac{1}{21} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6},$$

$$\frac{5}{31} = \frac{5 \cdot 24}{31 \cdot 24} = \frac{2 + 3 + 4 + 6 + 12 + 31 + 62}{31 \cdot 24} =$$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{62} + \frac{1}{124} + \frac{1}{186} + \frac{1}{248} + \frac{1}{372},$$

$$\frac{5}{121} = \frac{30}{726} = \frac{22 + 6 + 2}{726} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363},$$

b) Potenzen-von-Zwei-Algorithmus

$$\frac{3}{7} = \frac{12}{28} = \frac{7 + 4 + 1}{28} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28},$$

$$\frac{5}{31} = \frac{40}{248} = \frac{31 + 8 + 1}{248} = \frac{1}{8} + \frac{1}{31} + \frac{1}{248},$$

$$\frac{5}{121} = \frac{40}{968} = \frac{22 + 11 + 4 + 2 + 1}{968} = \frac{1}{44} + \frac{1}{88} + \frac{1}{242} + \frac{1}{484} + \frac{1}{968}.$$

Darstellungen mit minimalem  $D(m, n)$  erhält man natürlich nur, wenn man wie oben beschrieben  $k$  durch alle geforderten Werte laufen läßt, welches nur bei Computerausführung sinnvoll ist. Ich habe in meinen Beispielen die Darstellungen gewählt, die man durch Probieren leicht erhält, um zu zeigen, daß auch die Ausführung ohne Computer nicht unbedingt schlechtere Werte liefert als andere Algorithmen.

#### 1.6.4 Praktische Zahlen

Zahlen  $n$ , deren Teilersummen alle Zahlen  $m < n$  ergeben, wurden von [Sr,48] *praktische Zahlen* getauft, sie wurden von [Ste,54] und [Si,55] charakterisiert. Ein Beispiel ist 6, Teilersummen von 6 sind 1, 2, 3, 3 + 1, 3 + 2.

Für den Multiplikationsalgorithmus sind solche praktische Zahlen als Nenner  $n$  sehr günstig, denn für sie läßt sich  $\frac{m}{n}$  sofort zerlegen. So gilt zum Beispiel

$$\frac{57}{60} = \frac{3 + 4 + 20 + 30}{60} = \frac{1}{20} + \frac{1}{15} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

Man findet diese Zahlen daher oft bei alten Maßeinheiten. Falls  $n$  keine praktische Zahl ist, so sind laut [Cam,78]  $nk!$  und  $n2^l$  praktische Zahlen für ein  $k$  bzw.  $l$ . Deswegen wurden diese in obigen Algorithmen zur Erweiterung von  $\frac{m}{n}$  benutzt.

#### 1.6.5 Weitere Algorithmen

Es gibt noch mehrere andere Algorithmen, von denen ich einige hier kurz ansprechen möchte. Bleicher entwickelte drei Algorithmen.

- Farey-Folgen-Algorithmus [Bl,68]

Die Farey-Folge  $F_i$  enthält alle Brüche  $\frac{m}{n}$ ,  $0 < \frac{m}{n} < 1$ ,  $1 \leq m \leq i$  in wachsender Reihenfolge. Falls  $\frac{m'}{n'}$  der Vorgänger von  $\frac{m}{n}$  in  $F_n$  ist, so

gilt  $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} + \frac{1}{n'n}$ . Im Fall  $m' = 0$  hat man eine Zerlegung gefunden. Ansonsten sucht man den Vorgänger  $\frac{m''}{n''}$  von  $\frac{m'}{n'}$  in  $F_{n'}$  und so fort.

Für diesen Algorithmus gilt  $s \leq m$  und  $a_s \leq n(n-1)$ . Ein Nachteil ist, daß stets erst Teile der Farey-Folgen berechnet werden müssen.

Für die Beispiele gilt

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35}$$

und

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{25} + \frac{1}{1225} + \frac{1}{3577} + \frac{1}{7081} + \frac{1}{11737}$$

- Kettenbruchalgorithmus [Bl,72]

Ich werde diesen Algorithmus hier nicht weiter beschreiben. Laut [BlEr,76] gilt  $s \leq \min\{m, \frac{2(\log n)^2}{\log_2 n}\}$  und  $a_s \leq n(n-1)$ .

- Bleicher-Erdős-Algorithmus [BlEr,76]

Es ist ein Multiplikationsalgorithmus, der  $\frac{m}{n}$  mit dem Produkt der ersten  $k$  Primzahlen erweitert und dann eine bestimmte Zerlegung des Zählers erfordert. Er liefert  $a_s \leq cn(\log n)^3$ , mit einer Konstante  $c$ . Zum Beispiel gilt

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{30} + \frac{1}{242} + \frac{1}{363} + \frac{1}{1210} + \frac{1}{3630}$$

- Sonstige Algorithmen

Weitere Multiplikationsalgorithmen stammen von [Er,50] (mit  $s \leq \frac{8 \log n}{\log_2 n}$  und  $a_s \leq \frac{4n^2 \log n}{\log_2 n}$ ) und [Go,62] (mit  $s \leq m$  und  $a_s \leq n(n-1)$ ). Yokotas Algorithmen habe ich zu Anfang dieses Abschnitts 1.6 schon erwähnt. [Ern,80] liefert einen Algorithmus mit  $a_s \leq 2n^2$  und  $s \leq \log_2 m + 2 \log_2 n$ . Zwei Algorithmen findet man in [Lix,89].

## 1.7 Die Vermutungen von Erdős, Sierpiński und Schinzel

In Abschnitt 1.5 hatte ich gezeigt, daß es kein  $s$  gibt, so daß alle  $\frac{m}{n}$  aus  $\mathcal{V}_s$  sind. Man konnte jedoch zeigen, daß fast alle Brüche in  $\mathcal{N}_3$  bzw. sogar schon in  $\mathcal{N}_2$  liegen. Folgende Vermutungen wurden gestellt und sind bis heute unbewiesen

- Vermutung von Erdős-Straus  $\frac{4}{n} \in \mathcal{N}_3$

- Vermutung von Sierpiński  $\frac{5}{n} \in \mathcal{N}_3$
- Vermutung von Kiss  $\frac{4}{n}, \frac{5}{n}, \frac{6}{n}, \frac{7}{n} \in \mathcal{N}_3, \frac{8}{n}, \frac{9}{n}, \dots, \frac{12}{n} \in \mathcal{N}_4$
- Vermutung von Schinzel  $\frac{m}{n} \in \mathcal{Z}_3$  für  $n > n_0(m)$ .

Die letzte Vermutung ist auch für  $\mathcal{N}_3$  sinnvoll. Auf sie, insbesondere auf die Werte  $n_0(m)$  werde ich in Kapitel 5 näher eingehen. Es ist bisher nicht gelungen, eine dieser Vermutungen allgemein zu beweisen. Die Teilergebnisse, die man für bestimmte Werte von  $m$  und  $n$  erreichen konnte, werde ich am Schluß dieses Kapitels in Form einer Tabelle zusammenstellen.

Man vermutet also, daß es für festes  $m$  nur endlich viele  $n$  gibt mit  $\frac{m}{n} \notin \mathcal{N}_3$ . Für festes  $m$  gibt es zwar stets unendlich viele  $n$  mit  $\frac{m}{n} \notin \mathcal{N}_3$ , zum Beispiel alle  $n$ , die nur aus Teilern kongruent 1 modulo  $m$  bestehen (wie in Kapitel 3 bewiesen wird), aber dennoch gilt für fast alle  $n$ , daß  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_2$  erfüllt ist. Denn [HoSt,85] zeigen

**Satz 9 (Hofmeister,Stoll)** *Für festes  $m$  gilt*

$$|\{n \leq N \mid \frac{m}{n} \notin \mathcal{N}_2\}| \ll N(\log N)^{\frac{1}{\varphi(m)}},$$

wobei  $\varphi$  die Eulersche Funktion bezeichnet.

Die entsprechende Aussage für  $\mathcal{N}_3$  zeigt [Va,70]

**Satz 10 (Vaughan)** *Für festes  $m$  gilt*

$$|\{n \leq N \mid \frac{m}{n} \notin \mathcal{N}_3\}| \ll N \exp\left\{-\frac{(\log N)^{\frac{2}{3}}}{c(m)}\right\},$$

wobei  $c(m) > 0$  nur von  $m$  abhängt.

Der Satz von Vaughan ist ein Spezialfall des Satzes von Shan [Sh,86]

**Satz 11 (Shan)** *Für festes  $m$  gilt*

$$|\{n \leq N \mid \frac{m}{n} \notin \mathcal{N}_s\}| \ll N \exp\left\{-\frac{(\log N)^{1-\frac{1}{s}}}{c(m,s)}\right\},$$

wobei  $c(m,s) > 0$  nur von  $s$  und  $m$  abhängt.

Außerdem verbessert dieser Satz das Ergebnis von [Vi,70], welcher für den Exponenten von  $\log N$  nur  $1 - \frac{1}{s-1}$  zeigen konnte. Diese Sätze werden dadurch bewiesen, daß man Restklassen angibt, so das man für jeden Nenner aus diesen Restklassen einen darstellbaren Bruch erhält. Mithilfe einer Siebmethode gewinnt man die Abschätzungen. Eine speziellere Abschätzung liefert [We,70], er beweist

$$|\{n \leq N \mid \frac{4}{n} \notin \mathcal{N}_3\}| < \frac{cN}{(\log N)^{\frac{7}{4}}},$$

wobei  $c$  eine Konstante ist.

Hier die Übersicht über die bisherigen Ergebnisse zu den anfangs genannten Vermutungen.

a) Erdős-Straus  $\frac{4}{n} \in \mathcal{N}_3$

	bewiesen für	von
1	$< n \leq 106\,128$	[Ob,50]
106 129	$\leq n \leq 141\,648$	[Ros,54]
1	$< n < 200\,000$	[Ki,59]
1	$< n < 10\,000\,000$	[Yam,65]
10 000 000	$\leq n \leq 100\,000\,000$	[Te,71]
10 000 000	$\leq n \leq 11\,000\,000$	[Jol,76]
1	$< n \leq 100\,000\,000$	[Fr,78]
alle $n$ außer modulo	198 Restklassen $840 \cdot 11 \cdot 13$	[Te,71]

b) Sierpiński  $\frac{5}{n} \in \mathcal{N}_3$

	bewiesen für	von
1	$< n \leq 1\,000$	[Si,56]
1	$< n \leq 922\,321$	[Pal,58]
1	$< n < 10\,000$	[Ki,60]
1	$< n < 30\,000$	[Ai,64]
1	$< n < 1\,057\,438\,801$	[Ste,64]
alle $n$ außer	$n \equiv 1 \pmod{1\,260}$	[Pal,58]
alle $n$ außer	$n \equiv 1 \pmod{278\,460}$	[Ste,64]

c) Kiss  $\frac{6}{n} \in \mathcal{N}_3$

	bewiesen für	von
1	$< n < 10\ 000$	[Ki,60]
1	$< n < 2\ 000$	[Ai,64]
1	$< n \leq 100\ 000$	[We,74]

d) Kiss  $\frac{7}{n} \in \mathcal{N}_3$

	bewiesen für	von
2	$< n < 10\ 000$	[Ki,60]
2	$< n < 2\ 000$	[Ai,64]
2	$< n \leq 100\ 000$	[We,74]

e) Kiss  $\frac{8}{n}, \frac{12}{n} \in \mathcal{N}_4$

	bewiesen für	von
?	$< n < 200\ 000$	[Ki,60]

f) Schinzel  $\frac{m}{n} \in \mathcal{Z}_3$

	bewiesen für	von
1	$\leq m < 20$	[Si,56]
19	$\leq m < 24$	[Pal,58]
19	$\leq m < 22$	[Sed,59]
1	$\leq m < 36$	[StWe,66]
1	$\leq m < 40$	[StSu,78]



## 2 Eine allgemeine Formel für die Zerlegung in drei Stammbrüche

### 2.1 Vorbemerkung

Ich ziehe hier die Herleitung einer Formel für die Zerlegung eines Bruches in drei Stammbrüche vor, da sie sich auf die Zerlegung in zwei Stammbrüche übertragen läßt. Weitere Aussagen über die Zerlegung in drei Stammbrüche erfolgen dann erst in Kapitel 4 dieser Arbeit. Außerdem werden in diesem Kapitel schon grundlegende Probleme im Umgang mit Stammbrüchen deutlich.

### 2.2 Herleitung der Formel

Untersucht wird die Gleichung

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}$$

bzw.

$$\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_3$$

mit  $m, n, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{N}$ . Dazu folgt zunächst

**Definition 2** Sei

$$\begin{aligned} a_1 &:= d\delta z_3 \zeta_3 z_4 \zeta_4 e_1 \\ a_2 &:= d\delta z_3 \zeta_3 z_5 \zeta_5 e_2 \\ a_3 &:= d\delta z_4 \zeta_4 z_5 \zeta_5 e_3 \end{aligned}$$

mit  $(a_1, a_2, a_3) = d\delta$ ,  $\frac{(a_1, a_2)}{d\delta} = z_3 \zeta_3$ ,  $\frac{(a_1, a_3)}{d\delta} = z_4 \zeta_4$ ,  $\frac{(a_2, a_3)}{d\delta} = z_5 \zeta_5$ ,

$$\left( d\delta, \frac{z_3 \zeta_3 e_1 e_2 + z_4 \zeta_4 e_1 e_3 + z_5 \zeta_5 e_2 e_3}{\zeta_3 \zeta_4 \zeta_5} \right) = \delta,$$

$$(z_3 \zeta_3, z_4 \zeta_4 e_1 e_3 + z_5 \zeta_5 e_2 e_3) = \zeta_3,$$

$$(z_4 \zeta_4, z_3 \zeta_3 e_1 e_2 + z_5 \zeta_5 e_2 e_3) = \zeta_4,$$

$$(z_5 \zeta_5, z_3 \zeta_3 e_1 e_2 + z_4 \zeta_4 e_1 e_3) = \zeta_5,$$

Diese Definition ist für beliebige natürliche Zahlen  $a_1, a_2, a_3$  möglich. Die  $\zeta_j$ ,  $j \in \{3, 4, 5\}$  sind offenbar teilerfremd zueinander, daher folgt mit den letzten drei Zeilen der Definition, daß in der viertletzten Zeile der größte gemeinsame Teiler von natürlichen Zahlen gebildet wird.

Das Problem beim Umgang mit Stammbrüchen ist stets die große Anzahl benötigter Variablen. In dieser Definition bezeichnen  $d$  und  $\delta$  Variablen, die gemeinsame Teiler der drei  $a_i$  sind ( $i$  sei in diesem Kapitel stets  $\in \{1, 2, 3\}$ ),  $z_j$  und  $\zeta_j$ ,  $j \in \{3, 4, 5\}$ , teilen genau zwei der durch  $d\delta$  gekürzten  $a_i$ . Die Variablen  $e_i$  bezeichnen die durch  $d\delta$  und die jeweiligen  $z_j\zeta_j$  geteilten  $a_i$ . Aus diesen Definitionen folgt, wie der Beweis zum folgenden Satz 12 zeigt, daß durch die mit griechischen Buchstaben bezeichneten Variablen der Bruch  $m/n$  stets in einer um 1 höheren Potenz gekürzt werden kann, als durch die korrespondierenden mit deutschen Buchstaben bezeichneten Variablen. Die Indizes  $j$  der  $z_j$  und  $\zeta_j$  ergeben sich als Summe der entsprechenden Indizes  $i$  der  $a_i$ .

Warum diese Definitionen so gewählt sind, wird im Beweis von Satz 12 deutlich. Zunächst folgen jedoch aus der Definition einige Teilbarkeitsbeziehungen. Mit der Definition von  $\frac{(a_1, a_2)}{d\delta} = z_3\zeta_3$  folgt zum Beispiel  $(z_4\zeta_4e_1, z_5\zeta_5e_2) = 1$ .

Man erhält die Tabelle (5)

ggT	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$z_3$	$\zeta_3$	$z_4$	$\zeta_4$	$z_5$	$\zeta_5$	$\delta$	$d$
$e_1$	$e_1$	1	1		1		1	1	1	1	
$e_2$		$e_2$	1		1	1	1		1	1	
$e_3$			$e_3$	1	1		1		1	1	
$z_3$				$z_3$		1	1	1	1	1	
$\zeta_3$					$\zeta_3$	1	1	1	1		
$z_4$						$z_4$		1	1	1	
$\zeta_4$							$\zeta_4$	1	1		
$z_5$								$z_5$		1	
$\zeta_5$									$\zeta_5$		
$\delta$										$\delta$	
$d$											$d$

Zu beweisen sind hiervon noch  $(e_1, \zeta_3) = (e_1, \zeta_4) = 1$  und natürlich die analogen Beziehungen für  $e_1$  und  $e_2$ . Aus  $(e_1, \zeta_3) = t$  folgt  $t \mid z_5\zeta_5e_2e_3$ , woraus wiederum  $t = 1$  folgt. Entsprechendes zeigt man für die anderen Variablen.

$\delta$  ist zu den  $z_j$  aufgrund der Definition der  $\zeta_j$  als größtem gemeinsamen Teiler teilerfremd und zu den  $e_i$  aus folgendem Grund: falls  $(\delta, e_1) = t$  gilt, so würde  $t \mid z_5 \zeta_5 e_2 e_3$  folgen. Oben wurde schon gezeigt, daß dann  $t = 1$  gelten muß.

Alle anderen Tabelleneinträge sind offensichtlich oder folgen analog zu den eben genannten Beispielen. Im Satz 12 werden diese Aussagen benötigt.

**Satz 12** *Ein vollständig gekürzter Bruch  $\frac{m}{n}$  ist genau dann  $\in \mathcal{N}_3$ , wenn es natürliche Zahlen  $e'_1, e'_2, e'_3, z'_3, z'_4, z'_5, \zeta'_3, \zeta'_4, \zeta'_5, d', \delta'$  gibt mit*

$$m = \frac{z'_3 \zeta'_3 e'_1 e'_2 + z'_4 \zeta'_4 e'_1 e'_3 + z'_5 \zeta'_5 e'_2 e'_3}{\delta' \zeta'_3 \zeta'_4 \zeta'_5},$$

$$n = d' z'_3 z'_4 z'_5 e'_1 e'_2 e'_3.$$

Beweis: Sei  $\frac{m}{n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}$ , also  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_3$ . Dann wähle man für die mit Strich gekennzeichneten Variablen des Satzes die entsprechenden Variablen aus Definition 2. Mit dieser Wahl gilt

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= \frac{a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3}{a_1 a_2 a_3} \\ &= \frac{(d\delta)^2 ((z_3 \zeta_3)^2 z_4 \zeta_4 z_5 \zeta_5 e_1 e_2 + (z_4 \zeta_4)^2 z_3 \zeta_3 z_5 \zeta_5 e_1 e_3 + (z_5 \zeta_5)^2 z_3 \zeta_3 z_4 \zeta_4 e_2 e_3)}{(d\delta)^3 (z_3 \zeta_3 z_4 \zeta_4 z_5 \zeta_5)^2 e_1 e_2 e_3} \\ &= \frac{z_3 \zeta_3 e_1 e_2 + z_4 \zeta_4 e_1 e_3 + z_5 \zeta_5 e_2 e_3}{d\delta z_3 \zeta_3 z_4 \zeta_4 z_5 \zeta_5 e_1 e_2 e_3}. \end{aligned}$$

Aufgrund von Definition 2 ist dies noch kein vollständig gekürzter Bruch. Durch die  $e_i$  kann man nicht kürzen, denn angenommen,  $e_1$  wäre ein Faktor von Zähler und Nenner des Bruchs, so würde  $e_1 \mid z_5 \zeta_5 e_2 e_3$  folgen. Dieses ist aber unmöglich, wie oben schon gezeigt wurde.

Laut Definition 2 kann durch die  $z_j$  und durch  $d$  nicht gekürzt werden, aber durch die  $\zeta_j$  und  $\delta$ . Somit erhält man

$$\frac{m}{n} = \frac{z_3 \zeta_3 e_1 e_2 + z_4 \zeta_4 e_1 e_3 + z_5 \zeta_5 e_2 e_3}{d z_3 z_4 z_5 e_1 e_2 e_3}.$$

In der letzten Gleichung ist der Zähler des Doppelbruchs eine natürliche Zahl. Weiter kann nicht gekürzt werden. Da  $m/n$  vollständig gekürzt war, gelten die für  $m$  und  $n$  im Satz behaupteten Darstellungen.

Die andere Beweisrichtung ergibt sich offensichtlich dadurch, daß man für derartige  $n$  und  $m$  obige Umformungen in der anderen Richtung durchläuft und somit  $\frac{m}{n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}$  erhält.  $\diamond$

Im Beweis benötige ich als gebundene Variablen beliebige natürliche Zahlen, daher mußte ich die Variablen mit Strichen versehen. Für die eine Beweisrichtung definiert man dann für die Variablen mit Strich die ohne Strich aus Definition 2. In der anderen Beweisrichtung ist es nicht notwendig, die Variablen so zu wählen, daß sie Definition 2 genügen. Es ist jedoch immer möglich, die Variablen so umzuformen, daß sie Definition 2 genügen, falls sie die im Satz geforderten Bedingungen erfüllen. Den Beweis dafür will ich hier nur andeuten. Angenommen es gilt  $(e'_1, e'_2) = t > 1$ , dann folgt  $t \mid \delta'$  oder  $t$  teilt  $\zeta'_3$ , denn sonst wäre  $\frac{m}{n}$  nicht vollständig gekürzt. Im ersten Fall definiere man  $e_1 := \frac{e'_1}{t}$ ,  $e_2 := \frac{e'_2}{t}$ ,  $d := d't$ ,  $z_3 := z'_3 t$  und  $\delta := \frac{\delta'}{t}$ , im zweiten Fall definiere man  $e_1, e_2, \zeta_3$  als die entsprechenden durch  $t$  geteilten Variablen mit Strich und  $z_3 := z'_3 t^2$ . Somit erfüllen  $e_1$  und  $e_2$  die in (5) geforderte Teilerfremdheit. Analog kann man mit allen anderen Variablen verfahren, so lange bis sie alle (5) genügen. Wenn die Variablen (5) genügen und die Bedingungen aus Satz 12 erfüllen, dann erfüllen sie auch Definition 2 mit entsprechend gewählten  $a_i$ .

Für die zweite Beweisrichtung müssen die Variablen Definition 2 also nicht erfüllen, man kann sie jedoch stets so umformen, daß sie der Definition genügen. Daher verzichte ich im folgenden wieder auf die Kennzeichnung der Variablen mit Strichen, auch wenn ich den Satz zitiere.

Der Bruch  $\frac{a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3}{a_1 a_2 a_3}$  (die  $a_i$  entsprechend Definition 2 gewählt) kann also durch  $z_3 z_4 z_5 (\zeta_3 \zeta_4 \zeta_5 d)^2 \delta^3$  gekürzt werden.

Die im Satz gegebene Formel mag umständlich erscheinen, zumal sie kaum praktische Anwendbarkeit bietet, denn es läßt sich für gegebene  $m$  und  $n$  nicht ohne weiteres entscheiden, ob die im Satz geforderten 11 Variablen existieren oder nicht.

Aber dies ist eine allgemeine Formel, aus der man Formeln für Spezialfälle, zum Beispiel für Primzahlennenner  $n$ , leicht ableiten kann. Einige der Variablen und Terme mit den Variablen haben anschauliche Bedeutungen. Näheres dazu werde ich in Kapitel 4 darlegen, hier werde ich nur auf die Bedeutung von  $d$  und  $\delta$  eingehen.

### 2.3 Die Bedeutung von $d$ und $\delta$

Sei  $a'_i := d' \delta' a_i$ ,  $m' := \frac{m}{\delta'}$ ,  $n' := d' n$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  und  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_3$ . Es folgt

$$\frac{m'}{n'} = \frac{1}{a'_1} + \frac{1}{a'_2} + \frac{1}{a'_3} =$$

$$\frac{1}{a_1 d' \delta'} + \frac{1}{a_2 d' \delta'} + \frac{1}{a_3 d' \delta'} = \frac{1}{d' \delta'} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right) = \frac{1}{d' \delta'} \frac{m}{n} = \frac{\frac{m}{d'}}{\delta' n}.$$

Dies bedeutet, daß mit  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_3$  auch  $\frac{\frac{m}{d'}}{\delta' n} \in \mathcal{N}_3$ . Falls ein Bruch  $m/n$  als Summe dreier Stammbrüche darstellbar ist, dann sind auch die Brüche darstellbar, die entstehen, wenn man den Zähler  $m$  durch seine Teiler ersetzt oder den Nenner  $n$  mit beliebigen natürlichen Zahlen multipliziert. Die Teilerfremdheit von  $\delta$  nach (5) ist dabei keine Einschränkung, denn  $m$  besitzt mit Sicherheit keinen Teiler, der auch  $n$  teilt.

## 2.4 Teilbarkeitsbedingungen für die $\zeta_j$

Direkt aus Definition 2 folgt mit  $(\zeta_3, e_3) = (\zeta_4, e_2) = (\zeta_5, e_3) = 1$  (aus (5)), daß

$$\begin{aligned} \zeta_3 &| z_4 \zeta_4 e_1 + z_5 \zeta_5 e_2 \\ \zeta_4 &| z_3 \zeta_3 e_1 + z_5 \zeta_5 e_3 \\ \zeta_5 &| z_3 \zeta_3 e_2 + z_4 \zeta_4 e_3. \end{aligned}$$

gilt. Da ich dies in Kapitel 4 benötige, habe ich hier schon darauf hingewiesen.

## 2.5 Der Satz von Rav für $s = 3$

Der schon in Kapitel 1 erwähnte Satz von Rav [Ra,66] kann nun für den Fall  $s = 3$  als Korollar aus Satz 12 gefolgert werden.

**Korollar 1 (Rav, für  $s = 3$ )**

$$\frac{m}{n} \in \mathcal{V}_3 \iff \bigvee_{M, N, N_1, \dots, N_3} \frac{M}{N} = \frac{m}{n}, \quad \bigwedge_{1 \leq i \leq 3} N_i | N,$$

$$(N_1, N_2, N_3) = 1, \quad N_1 + N_2 + N_3 = 0 \pmod{M}, \quad N_1 < N_2 < N_3$$

Beweis: Es bleibt nur noch eine Richtung zu zeigen. Sei  $\frac{m}{n} \in \mathcal{V}_3$ . Seien  $M := \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5 m$ ,  $N := \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5 n$ ,  $N_1 := z_3 \zeta_3 e_1 e_2$ ,  $N_2 := z_4 \zeta_4 e_1 e_3$  und  $N_3 := z_5 \zeta_5 e_2 e_3$  gewählt,  $m$  und  $n$  entsprechend Satz 12 mit Definition 2. Außerdem sei o.B.d.A.  $N_1 \leq \dots \leq N_3$ . Die Bedingungen  $\bigwedge_{1 \leq i \leq 3} N_i | N$  und  $N_1 + \dots + N_3 = 0 \pmod{M}$  sind offensichtlich erfüllt.

$(\frac{N_1}{e_1}, \frac{N_2}{e_1}) = t > 1$  ist wegen (5) unmöglich. Der größte gemeinsame Teiler von  $N_1$  und  $N_2$  ist also  $e_1$ . Da  $e_1$  nicht  $N_3$  teilt, können die  $N_i$  nicht alle drei gleich sein und können auch keinen größten gemeinsamen Teiler größer als 1 haben. Aus  $N_1 = N_2 = e_1$  folgt aber  $a_1 = e_1, a_2 = a_3 = z_5 \zeta_5$ , welches wegen  $\frac{m}{n} \in \mathcal{V}_3$  nicht möglich ist. Also sind auch  $N_1$  und  $N_2$  verschieden.  $\diamond$

### 3 Zerlegung in zwei Stammbrüche

#### 3.1 Vorbemerkung

Ich werde im folgenden drei Kriterien angeben, mit denen man feststellen kann, ob für einen gegebenen Bruch  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_2$  gilt. Für das erste Kriterium wird der Nenner  $n$  in Faktoren zerlegt, beim zweiten wird  $n \bmod m$  betrachtet und beim dritten werden Teiler von  $n^2$  mit einer bestimmten Eigenschaft gesucht. Für gegebenes  $m/n$  kann man das Kriterium wählen, das einem in diesem Fall am geeignetesten erscheint.

#### 3.2 Das erste Kriterium

Analog zu den Überlegungen aus Kapitel 2 erhält man für die Zerlegung eines Bruches in zwei Stammbrüche

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{\frac{e_1+e_2}{\zeta}}{ze_1e_2}, \quad m = \frac{e_1+e_2}{\zeta}, \quad n = ze_1e_2 \quad (6)$$

mit

**Definition 3**  $a_1 := z\zeta e_1$ ,  $a_2 := z\zeta e_2$ ,  $(a_1, a_2) = z\zeta$ ,  $(z\zeta, e_1 + e_2) = \zeta$ .

Denn es gilt

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{z\zeta e_1} + \frac{1}{z\zeta e_2} = \frac{z\zeta e_1 + z\zeta e_2}{z^2\zeta^2 e_1 e_2} = \frac{e_1 + e_2}{z\zeta e_1 e_2} = \frac{\frac{e_1+e_2}{\zeta}}{ze_1e_2}.$$

Die Teilbarkeitsbeziehungen lauten: (7)

ggT	$e_1$	$e_2$	$z$	$\zeta$
$e_1$	$e_1$	1		1
$e_2$		$e_2$		1
$z$			$z$	
$\zeta$				$\zeta$

Dieses folgt wegen  $(e_1, e_2) = 1$  nach Definition von  $z\zeta$ . Aus  $(\zeta, e_1) = t$  folgt  $(\zeta, e_2) = t$  und  $(e_1, e_2) = t$ , also  $t = 1$ .

Wenn man  $n$  mithilfe der anderen Variablen ausdrückt, erhält man

$$\frac{m}{ze_1e_2} = \frac{1}{z\zeta e_1} + \frac{1}{z\zeta e_2} \iff e_1 + e_2 = \zeta m, \quad (8)$$

oder, falls man zusätzlich noch  $e_1$  mithilfe der anderen Variablen ausdrückt,

$$\frac{m}{ze_2(\zeta m - e_2)} = \frac{1}{z\zeta(\zeta m - e_2)} + \frac{1}{z\zeta e_2}. \quad (9)$$

Dies ergibt

**Satz 13**

$$\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_2 \iff \bigvee_{e'_2, \zeta'} e'_2 \mid n, \quad e'_1 := \zeta' m - e'_2, \quad e'_1 \mid n$$

Beweis: Die Implikation von links nach rechts erhält man, indem man für die Variablen  $e'_1, e'_2, \zeta'$  die entsprechenden Variablen aus Definition 3 wählt. Die andere Implikation folgt mit (9).  $\diamond$

In Worte gefaßt, besagt dieser Satz, daß für einen vollständig gekürzten Bruch genau dann  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_2$  gilt, wenn  $n$  zwei Teiler  $e'_1, e'_2$  besitzt, deren Summe durch  $m$  teilbar ist.

Es ist dabei nicht unbedingt notwendig, daß diese beiden Teiler  $e'_1$  und  $e'_2$  teilerfremd zueinander sind. Denn falls  $e'_1 = te_1, e'_2 = te_2, (e'_1, e'_2) = t$  und  $e'_1 + e'_2 = \zeta' m$ , so gilt  $e_1 + e_2 = \frac{e'_1 + e'_2}{t} = \frac{\zeta' m}{t}$ , und wegen  $(m, n) = 1$ , also  $(t, m) = 1$ , folgt  $t \mid \zeta'$ . Falls man also zwei beliebige Teiler von  $n$  gefunden hat, die die Bedingung von Satz 13 erfüllen, so kann man die beiden Teiler auch durch ihren größten gemeinsamen Teiler kürzen.

Falls man  $e'_1$  und  $e'_2$  teilerfremd wählt, erfüllen die Variablen Definition 3. Daher verzichte im folgenden wieder auf die Kennzeichnung der Variablen mit Strichen, alle Variablen seien im Einklang mit Definition 3 gewählt.

Das Kriterium aus Satz 13 wurde für  $m = 1$  schon um die Jahrhundertwende entdeckt, und zwar unabhängig voneinander 1896 von Palmström [Di,20] und von [So,05]. Für beliebiges  $m$  fanden es ebenfalls unabhängig voneinander [Ru,22], [Pad,34], [Ki,59] und [Ai,64].

### 3.2.1 Folgerungen

- a) Für  $m \in \{1, 2\}$  gibt es immer Zerlegungen.
- b) Für Primzahlennenner  $n$  kann man als Summen zweier Teiler von  $n$  nur  $1 + 1$  oder  $n + 1$  wählen. Im ersten Fall ist die Bedingung aus Gleichung (8)  $1 + 1 = \zeta m$  nur in den schon in a) behandelten Trivialfällen erfüllbar, also für  $m < 3$ . Im zweiten Fall ist die Bedingung  $n + 1 = \zeta m$  zu erfüllen, welche äquivalent zu  $n \equiv -1 \pmod{m}$  ist.



Dies bedeutet: Ist  $m > 2$  und  $n$  eine Primzahl, so gilt

$$\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_2 \iff n \equiv -1 \pmod{m}$$

c) Falls  $n$  nur aus Teilern besteht, die  $\equiv 1 \pmod{m}$  sind, und  $m > 2$ , so gilt  $\frac{m}{n} \notin \mathcal{N}_2$ . Für alle Summen möglicher Teiler von  $n$  gilt dann  $e_1 + e_2 \equiv 2 \pmod{m}$  und  $2 \not\equiv 0 \pmod{m}$ . Die Fälle  $m = 3$  und  $m = 4$  kann man damit vollständig erschließen,  $\frac{3}{z(3t-1)}$  und  $\frac{4}{z(4t-1)}$  sind stets aus  $\mathcal{N}_2$ .  $\frac{4}{4t-2}$  läßt sich kürzen, ist somit auch  $\in \mathcal{N}_2$ .  $\frac{3}{3t-2}$  und  $\frac{4}{4t-3}$  sind nicht für alle  $t$  aus  $\mathcal{N}_2$ . Es gilt

$$m \in (3, 4) \Rightarrow \left( \frac{m}{n} \notin \mathcal{N}_2 \iff \bigwedge_{t|n} t \equiv 1 \pmod{m} \right)$$

Will man  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_2$  für  $m > 4$  entscheiden, so wird dies mit wachsendem  $m$  aufwendiger, da mehr Restklassen zu untersuchen sind.

### 3.3 Das zweite Kriterium

Betrachtet wird nun die Restklasse von  $n \pmod{m}$ , also

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{mt - r}$$

Dazu gelte im folgenden stets

**Definition 4**  $r, t > 0$ ,  $r \leq m$ ,  $(r, m) = 1$  und  $n = mt - r$ .

Der Fall  $m = r$  kann nur für  $m = 1$  auftreten.

Die Bedingung  $(r, m) = 1$  ist notwendig, da sonst  $(m, n) \neq 1$  wäre.

#### 3.3.1 Eine Darstellung

Mit obigen Festlegungen und

**Definition 5**  $k := a_1 - t$ ,  $k \in \mathbf{Z}, k \geq 0$ ,

erhält man

$$\frac{m}{mt - r} = \frac{1}{t + k} + \frac{1}{\frac{(t+k)(mt-r)}{mk+r}}, \quad (10)$$

denn

$$\frac{m}{mt - r} - \frac{1}{t + k} = \frac{mt + mk - mt + r}{(mt - r)(t + k)} = \frac{mk + r}{(mt - r)(t + k)}.$$

Somit gilt

**Satz 14**

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{mt-r} \in \mathcal{N}_2 \iff \bigvee_{k' \in \mathbf{Z}, k' \geq 0} mk' + r \mid (t+k')(mt-r)$$

Beweis: Für die Beweisrichtung von links nach rechts wähle man wieder  $k' := k$ . Die andere Richtung folgt aus (10).  $\diamond$

Hierbei sind auch für die zweite Beweisrichtung die Bedingungen aus Definition 4 erfüllbar, eventuell muß dafür ein anderes  $k'$  gewählt werden. Definition 5 wird in dieser Richtung zur Definition von  $a_1$ .

**3.3.2 Alle Darstellungen**

Wählt man  $k = 0$ , so erhält man, falls die Teilbarkeitsbedingung für  $k' := k$  aus Satz 14 erfüllt ist, laut Beweis zu Satz 1 die Darstellung mit dem kleinsten Nenner  $a_1$  und dem größten  $a_2$ . Läßt man  $a_1$  wachsen, so wird  $a_2$  kleiner. Sei o.B.d.A.  $a_1 \leq a_2$ , dann gilt für  $a_1 = a_2$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} = \frac{2}{a_1} = \frac{m}{n} \iff a_1 = \frac{2n}{m}.$$

Dies ist wegen  $(m, n) = 1$  nur möglich für  $m = 1$  und  $a_1$  gerade oder für  $m = 2$  und  $a_1$  ungerade. Es gilt dann

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$$

bzw.

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}.$$

Für beliebiges  $m$  gilt stets

$$a_1 \leq \frac{2n}{m} = \frac{2(mt-r)}{m} = 2t - \frac{2r}{m},$$

und wegen

$$1 < \frac{2r}{m} \leq 2 \iff r \leq m < 2r \quad \text{bzw.} \quad \frac{2r}{m} \leq 1 \iff 2r \leq m$$

folgt

$$a_1 \leq 2t - 2 \iff r \leq m < 2r \quad \text{bzw.} \quad a_1 \leq 2t - 1 \iff 2r \leq m.$$

**Satz 15** Alle Darstellungen  $\frac{m}{mt-r} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$  mit  $a_1 \leq a_2$  erhält man aus

$$\frac{m}{mt-r} = \frac{1}{t+k} + \frac{1}{\frac{(t+k)(mt-r)}{mk+r}},$$

falls  $mk+r \mid (t+k)(mt-r)$  und

(i)  $t \leq a_1 \leq 2t-1$  bzw.  $0 \leq k \leq t-1$  für  $m \geq 2r$ ,

(ii)  $t \leq a_1 \leq 2t-2$  bzw.  $0 \leq k \leq t-2$  für  $r \leq m < 2r$ .

Jetzt stellt sich die Frage, wann im Fall  $m > 2$  die maximalen Werte für  $a_1$  angenommen werden. Sei  $a_1 < a_2$ , also  $a_1 := 2t-1$  und  $a_2 := 2t+s$ ,  $s \in \mathbf{Z}$ ,  $s \geq 0$ . Dann gilt

$$\frac{1}{2t-1} + \frac{1}{2t+s} = \frac{4t+s-1}{4t^2+2t(s-1)-s} = \frac{4t+s-1}{(4t+s-1)t+t(s-1)-s}.$$

$-r := t(s-1) - s$  und  $-r < 0$  ist nur für  $t=1$  oder  $s=0$  oder  $s=1$  erfüllbar. (Denn für  $s \neq 0$  gilt  $-r < 0 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{s} + \frac{1}{t}$ .) Man erhält für  $t=1$ ,  $r=1$  bzw.  $s=0$ ,  $r=t$  bzw.  $s=1$ ,  $r=1$

$$\frac{1}{2-1} + \frac{1}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1} = \frac{m}{m-1},$$

$$\frac{1}{2t-1} + \frac{1}{2t} = \frac{4t-1}{(4t-1)t-t},$$

$$\frac{1}{2t-1} + \frac{1}{2t+1} = \frac{4t}{4t^2-1}.$$

Analog zeigt man  $a_1 = 2t-2$ ,  $a_2 = 2t+s$ ,  $s \in \mathbf{Z}$ ,  $s \geq -1$  gilt, falls  $t \leq 2 \vee s \leq 2 \vee (s=3 \wedge t \leq 5) \vee (t=3 \wedge s \leq 5)$ . Ansonsten gilt also immer  $a_1 < 2t-2$ .

$a_1 = 2t-1$  und  $a_2 = 2t$  bzw.  $a_1 = 2t-2$  und  $a_2 = 2t-1$  sind einfache Beispiele für Teilsummen der harmonischen Reihe, welche auch Gegenstand einiger Untersuchungen sind (z. B. [BlEr,73/75]).

### 3.3.3 Anzahl der Darstellungen

Jetzt untersuche ich, wieviele Darstellungen  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_2$  es für vorgebene  $m$  und  $n$  gibt. Dazu ist zu prüfen, wie oft die Teilbarkeitsbedingung aus Satz 14 erfüllt ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{m(t+k)(mt-r)}{m(mk+r)} &= \frac{(mt-r+mk+r)(mt-r)}{m(mk+r)} \\ &= \frac{(mt-r)^2 + (mk+r)(mt-r)}{m(mk+r)} = \frac{1}{m} \left( (mt-r) + \frac{(mt-r)^2}{mk+r} \right), \end{aligned}$$

und wegen  $(m, mk + r) = (m, r) = 1$  folgt

$$mk + r \mid (mt - r)(t + k) \iff mk + r \mid (mt - r)^2. \quad (11)$$

Da  $mk + r$  im folgenden öfter benötigt wird, lege ich

**Definition 6**  $q_1 := mk + r$

fest ( $q$  wie Teiler des Qadrats von  $n = mt - r$ ). Man erhält

**Satz 16** *Für  $n \equiv -r \pmod{m}$  liefert jeder Teiler  $q_1$  von  $n^2$  mit  $q_1 \equiv r \pmod{m}$ ,  $q_1 \leq n$  eine Zerlegung von  $\frac{m}{n}$  in eine Summe zweier Stammbrüche. Wählt man nacheinander alle solchen  $q_1$ , die die Bedingungen erfüllen, erhält man alle möglichen Zerlegungen.*

Beweis: Zu zeigen ist nur noch  $q_1 \leq n$ , welches aus Satz 15 folgt, denn

$$q_1 = mk + r \leq mt - m + r \leq mt - r = n \iff m \geq 2r,$$

$$q_1 = mk + r \leq mt - 2m + r \leq mt - r = n \iff 2m \geq 2r.$$

gilt.  $\diamond$

Dabei werden alle Zerlegungen außer denen mit  $a_1 = a_2$  doppelt gezählt (welche für  $m > 2$  nach Abschnitt 3.3.2 nicht möglich sind), denn mit  $n^2 \equiv r^2 \pmod{m}$  und  $q_1 \equiv r \pmod{m}$  gilt auch  $\frac{n^2}{q_1} \equiv r \pmod{m}$ .

**Satz 17** *Es gibt für jeden vollständig gekürzten Bruch  $\frac{m}{n}$ ,  $n \equiv -r \pmod{m}$ ,  $A$  verschiedene Zerlegungen in die Summe zweier Stammbrüche mit*

$$A = \begin{cases} \frac{|\{\theta \in \mathbf{N}: \frac{\theta|n^2}{2} \mid +1\}|}{2} & m \in \{1, 2\} \\ \frac{|\{\theta \in \mathbf{N}: \frac{\theta|n^2, \theta \equiv r \pmod{m}}{2}\}|}{2} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Für  $m \in \{1, 2\}$  ist die Bedingung  $q_1 \equiv r \pmod{m}$  trivial erfüllt. Denn für  $m = 1$  sind alle natürlichen Zahlen  $\equiv 0 \pmod{1}$ , für  $m = 2$  muß  $n$  ungerade sein, also sind alle Teiler von  $n$  ungerade. Die übrige Aussage des Satzes folgt aus Satz 16.  $\diamond$

Der Anzahl der Lösungen von  $\frac{m}{n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$  wurde für  $m = 1$  von [So,05], [Ci,34b] und [Dud,69] und für  $m = 2$  von [Go,73] bestimmt. Auch [Bs,70b] veröffentlichte Ergebnisse hierzu.

### 3.4 Synthese der beiden ersten Kriterien

Mit Hilfe der beiden Kriterien läßt sich das Problem der Darstellung  $\frac{m}{n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$  mit  $a_1 \mid a_2$  vollständig lösen.  
Die Formeln (8) und (10) lauteten

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{ze_1e_2} = \frac{1}{z\zeta e_1} + \frac{1}{z\zeta e_2}, \quad e_1 + e_2 = \zeta m$$

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{mt-r} = \frac{1}{t+k} + \frac{1}{\frac{(t+k)(mt-r)}{q_1}}, \quad q_1 = mk+r, \quad q_1 \mid n^2.$$

Daraus folgt  $a_1n = (t+k)(mt-r) = z\zeta e_1ze_1e_2 = z^2e_1^2e_2\zeta$ ,

$$q_1 = \frac{a_1n}{a_2} = \frac{z^2e_1^2e_2\zeta}{z\zeta e_2} = ze_1^2.$$

Die Synthese der beiden Ansätze liefert also einen Zusammenhang zwischen den Variablen.

Speziell folgt aus  $e_1 = 1$ , daß  $q_1 = z$ ,  $\zeta = \frac{a_1}{z} = \frac{a_1}{q_1}$ ,  $e_2 = \frac{n}{z} = \frac{n}{q_1}$ . Man rechnet nach, daß sogar die Äquivalenzen

$$q_1 \mid n \iff q_1 \mid a_1 \iff q_1 = z \iff e_1 = 1 \iff a_1 \mid a_2$$

gelten. Hieraus folgt

**Satz 18** *Der vollständig gekürzte Bruch  $\frac{m}{n}$ ,  $n \equiv -r \pmod{m}$ , ist genau dann als Summe  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$  mit  $a_1 \mid a_2$  darstellbar, wenn  $n$  einen Teiler  $q_1$  mit  $q_1 \equiv r \pmod{m}$  hat.*

### 3.5 Das dritte Kriterium

Dieses Kriterium ist nur eine Umformulierung des zweiten.

Analog zu  $q_1 = ze_1^2 = ze_1(m\zeta - e_2) = mz\zeta e_1 - ze_1e_2 = ma_1 - n$  setze ich

**Definition 7**

$$q_2 := ze_2^2 = ma_2 - n$$

fest. Es gelten  $n^2 = ze_1^2ze_2^2 = q_1q_2$ ,  $a_1 = \frac{q_1+n}{m}$  und

$$a_2 = \frac{n+q_2}{m} = \frac{n+\frac{n^2}{q_1}}{m} = \frac{n\frac{n+q_1}{q_1}}{m} = \frac{na_1}{q_1}.$$

**Satz 19** *Es gilt  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_2$  genau dann, wenn es einen Teiler  $q_1$  von  $n^2$  mit  $m \mid q_1 + n$  und  $q_1 \leq n$ , gibt. Die Zerlegung lautet dann folgendermaßen*

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{\frac{q_1+n}{m}} + \frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{q_1}}{m}} = \frac{1}{\frac{q_1+n}{m}} + \frac{1}{\frac{n\frac{q_1+n}{q_1}}{q_1}}$$

Beweis: Der Satz folgt direkt aus Satz 16, die Zerlegung aus obiger Darstellung für  $a_2$ .  $\diamond$

Hierbei sind  $a_1$  und  $a_2$  bzw.  $q_1$  und  $q_2$  austauschbar. Es gilt zum Beispiel

$$m \mid q_1 + n \iff m \mid q_2 + n,$$

wie schon im Anschluß an Satz 16 gezeigt wurde. Um eine Zerlegung wie in Satz 19 zu finden, genügt es also, eine der beiden Teilbarkeiten nachzuweisen.

Dieses Ergebnis fanden unabhängig voneinander [An,1871] für  $m = 1$ , Zühlke 1905 [Di,20] für  $m = 2$  und [Ci,34a], [Bus,61], [Dud,69], [Bs,70b] und [Go,73] für beliebiges  $m$ .

## 3.6 Beispiele

### 3.6.1 Ein Vergleich der drei Kriterien in der Anwendung

Ich werde nun den Bruch  $\frac{7}{12}$  nacheinander mit Hilfe jedes der drei Kriterien in die Summe von zwei Stammbrüchen zerlegen. Daraus werden dann Vor- und Nachteile der Kriterien deutlich.

a) Kriterium 1 (Satz 13)

Gesucht sind Teiler  $e_1, e_2$  von 12 mit  $e_1 + e_2 = 7\zeta$ . Um keine Darstellung doppelt zu erhalten sei  $e_1 < e_2$ . Nach Abschnitt 3.3.2 ist  $e_1 = e_2$  unmöglich. Außerdem sei  $(e_1, e_2) = 1$ , dadurch wird nach der Bemerkung zu Satz 13 ebenfalls vermieden, Darstellungen doppelt zu erhalten. Die Teiler von 12 sind 1,2,3,4,6,12. Durch 7 teilbare Teilersummen sind  $1 + 6 = 3 + 4 = 7$  und  $2 + 12 = 14$ . Letztere scheidet aber aus, da 2 und 12 nicht teilerfremd sind, also gilt  $e_1 \in \{1, 3\}$ .  $\zeta$  ist in beiden Fällen gleich 1,  $z$  berechnet sich aus  $\frac{n}{e_1 e_2} = z$ . Man erhält

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$$

b) Kriterium 2 (Satz 15 mit (11))

Zunächst bestimmt man  $r$  und  $t$ . Aus  $12 = n = mt - r = 7t - r$  mit  $r < m = 7$  folgt  $r = t = 2$ . Nach Satz 15 soll  $0 \leq k \leq t - 1 = 1$  gelten, also  $k = 0$  oder  $k = 1$ . Wegen  $mk + r \in \{2, 9\}$  und  $2, 9 \mid 144$  findet man die beiden oben schon genannten Darstellungen.

c) Kriterium 3 (Satz 19)

Die Teiler  $q_1$  von  $n^2 = 144$  mit  $q_1 \leq n$  sind  $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9$  und  $12$ .  $7$  teilt  $q_1 + n = 2 + 12$  und  $9 + 12$ , also bleiben für  $q_1$  nur die Möglichkeiten  $q_1 = 2$  oder  $q_1 = 9$ . Mit diesen beiden erhält man wieder die beiden Darstellungen.

Falls  $t$  klein ist, das heißt  $m$  nicht viel kleiner als  $n$  ist, kann man mit Kriterium 2 schnell entscheiden, ob eine Zerlegung existiert. Für großes  $t$  ist dies Kriterium ungeeignet.

Falls  $n$  nur wenige Teiler besitzt sind Kriterium 1 und 3 gut anwendbar. Kriterium 1 betrachtet weniger Teiler (nur Teiler von  $n$ ), dafür aber alle Kombinationsmöglichkeiten der Teilersummen. In Kriterium 3 sind mehr Teiler zu suchen (Teiler von  $n^2$ ), aber diese sind nur zu  $n$  zu addieren.

Besitzt  $n$  viele Teiler, findet man vermutlich am schnellsten eine Darstellung, wenn man Teilersummen nach Kriterium 1 bildet.

### 3.6.2 Beispiele spezieller Zähler $m$

a)  $m = 1$

Satz 15 liefert

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{t-1} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{\frac{(t+1)(t-1)}{2}} = \dots = \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t-1)}.$$

Die Zerlegungen mit  $a_1 = t$  und  $a_1 = 2(t-1)$  sind immer möglich, falls  $n$  eine Primzahl ist, gibt es nur diese beiden Zerlegungen.

b)  $m = 2$

Satz 15 liefert

$$\frac{m}{n} = \frac{2}{2t-1} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t(2t-1)} = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{\frac{(t+1)(2t-1)}{3}} = \dots = \frac{1}{2t-1} + \frac{1}{2t-1}.$$

Hier sind ebenfalls zwei Zerlegungen immer möglich ( $a_1 = t$  oder  $a_1 = 2t-1$ ). Falls  $n$  eine Primzahl ist, so gibt es nur diese beiden Zerlegungen.

c)  $n \equiv -1 \pmod{m}$

Analog erhält man

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{mt-1} =$$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t(mt-1)} = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{\frac{(t+1)(mt-1)}{m+1}} = \dots = \frac{1}{2t-1} + \frac{1}{\frac{(2t-1)(mt-1)}{mt-(m-1)}}$$

Hier ist ebenfalls die Zerlegung mit  $a_1 = t$  immer möglich, falls  $n$  eine Primzahl ist, ist dies die einzige Zerlegung.

### 3.7 Die optische Gleichung und Verallgemeinerungen

Die Gleichung  $\frac{1}{n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$  wird als optische Gleichung oder Linsengleichung bezeichnet. Sie gibt die Beziehung zwischen Brennweite  $m$ , Gegenstandsweite  $a_1$  und Bildweite  $a_2$  an.

Gleichungen der Form  $\frac{1}{m} = \sum_{i=1}^s \frac{1}{a_i}$  sind Verallgemeinerungen von ihr. Auch für sie gibt es zum Teil anschauliche Deutungen. So berechnet zum Beispiel [Baw,89] alle ganzzahligen Seitenlängen  $a_1, a_2, a_3$  von Quadern, deren Volumen gleich ihrer Oberfläche ist. Es gilt

$$a_1 a_2 a_3 = 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) \iff \frac{1}{2} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}.$$

Andere Anwendungen untersucht [Bor,32a].

Eine allgemeine Lösung der verallgemeinerten optischen Gleichung ist bisher nicht bekannt, aber es gibt Teillösungen. Eine spezielle Darstellung liefert [Mos,45]:

$$\frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{(n^2-n-1)(n^2-n)} = \frac{1}{n}.$$

2 Teillösungen fand Palmström 1896 und 1899 [Di,20], ich habe sie in meine Notation übertragen.

a)  $n = de_1 \cdot \dots \cdot e_s$ ,  $a_1 = d\delta e_1, \dots, a_s = d\delta e_s$ ,  $\delta = \sum_{i=1}^s \frac{e_1 \dots e_s}{e_i}$  ist eine spezielle Lösung der verallgemeinerten optischen Gleichung. Für  $s = 3$  folgt dies aus Kapitel 2, in Satz 12 sind die Variablen  $m, \zeta'_3, \zeta'_4, \zeta'_5, z'_3, z'_4, z'_5$  gleich 1 zu setzen. Für  $s = 2$  folgt dies aus Satz 13 mit  $\zeta, z$  statt  $\delta, d$ .

b) Seine andere spezielle Lösung gebe ich hier nur für  $s \leq 3$  an:  $n = dz_3 z_4 z_5$ ,  $a_1 = d \frac{z_3 z_4 z_5 (z_3 + z_4 + z_5)}{z_5}, \dots, a_3 = d \frac{z_3 z_4 z_5 (z_3 + z_4 + z_5)}{z_3}$ . Diese Lösung erhält man aus Satz 12 mit  $m \zeta'_3 \zeta'_4 \zeta'_5 e'_1 e'_2 e'_3 = 1$ . Für  $s = 2$  folgt sie direkt aus Satz 13 mit  $a_1 = z \frac{(e_1 + e_2) e_1 e_2}{e_2}$  und  $a_2$  entsprechend.

Eine andere spezielle Lösung liefert [Mig,31]

Weitere Untersuchungen zu diesen Problemen findet man in [Bs,70a] und [Cap,27]. [Bs,75] schätzt die Anzahl der verschiedenen Lösungen mit verschiedenen  $a_i$  der verallgemeinerten optischen Gleichung für  $s > 2$  durch  $c(m)(s-1)!$  mit einer von  $m$  abhängigen Konstante  $c(m)$  nach unten ab.



## 4 Zerlegung in drei Stammbrüche

Die Zerlegung in drei Stammbrüche ist schwieriger als die in zwei, es ist bisher noch niemandem gelungen, eine Formel herzuleiten, mit der man für festen Zähler  $m$  für jeden Nenner  $n$  alle möglichen Zerlegungen in die Summe dreier Stammbrüche, falls es überhaupt welche gibt, sofort angeben könnte. Die einzige Möglichkeit, die ich bisher sehe, ist die, daß man Formeln angibt, die wenigstens für viele Spezialfälle Zerlegungen liefern, bzw. Formeln, die zwar keine allgemeinen Aussagen für beliebiges  $m$  und  $n$  erlauben, aber für konkrete Brüche  $\frac{m}{n}$  doch Zerlegungen leicht erschließbar machen.

Um dies zu erreichen, werde ich die Formel aus Kapitel 2 auf verschiedene Arten umformen und so verschiedene Spezialfälle behandeln.

### 4.1 Teilbarkeitsbedingungen

In diesem Abschnitt werden Bedingungen dafür, daß ein Bruch als Summe dreier Stammbrüche darstellbar ist, gesucht. Ich werde auf „Genau-Dann-Aussagen“ wie Satz 12 verzichten. Daher benötige ich Definition 2 und Aussage (5) nicht. Alle Variablen können also nun beliebige natürliche Zahlen sein. Allerdings wurde bisher immer darauf hingewiesen, daß man die Variablen, die die Bedingung aus Satz 12 erfüllen, so umformen kann, daß sie auch Definition 2 genügen. Es empfiehlt sich daher, sich die Variablen weiterhin gemäß Definition 2 vorzustellen. Ich benötige aus Definition 2 und (5) lediglich bei einigen Beweisen die Teilerfremdheit der Variablen. Darauf werde ich dann stets hinweisen.

Ansonsten gelten im folgenden nur diese Formeln aus Kapitel 2:

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} a_1 &:= d\delta z_3 \zeta_3 z_4 \zeta_4 e_1 \\ a_2 &:= d\delta z_3 \zeta_3 z_5 \zeta_5 e_2 \\ a_3 &:= d\delta z_4 \zeta_4 z_5 \zeta_5 e_3 \end{aligned} \quad (13)$$

Satz 12 aus Kapitel 2 besagte

$$\bigvee_{d,\delta,\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5,z_3,z_4,z_5,e_1,e_2,e_3} m = \frac{z_3 \zeta_3 e_1 e_2 + z_4 \zeta_4 e_1 e_3 + z_5 \zeta_5 e_2 e_3}{\delta \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5}, \quad (14)$$

$$n = dz_3 z_4 z_5 e_1 e_2 e_3$$

$$\implies \frac{m}{n} \in \mathcal{N}_3$$

Da  $\delta m \in \mathbf{N}$  sein soll, muß die Bedingung

$$\zeta_3 \zeta_4 \zeta_5 \mid z_3 \zeta_3 e_1 e_2 + z_4 \zeta_4 e_1 e_3 + z_5 \zeta_5 e_2 e_3 \quad (15)$$

erfüllt sein. Falls die  $\zeta_j$  zueinander und zu den  $e_i$ ,  $j \in \{3, 4, 5\}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  teilerfremd sind, ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} \zeta_3 & \mid z_4 \zeta_4 e_1 + z_5 \zeta_5 e_2 \\ \zeta_4 & \mid z_3 \zeta_3 e_1 + z_5 \zeta_5 e_3 \\ \zeta_5 & \mid z_3 \zeta_3 e_2 + z_4 \zeta_4 e_3 \end{aligned}$$

und zu

$$\begin{aligned} (a) \quad \bigvee_{\tau_3 \in \mathbf{N}} \zeta_3 \tau_3 &= z_4 \zeta_4 e_1 + z_5 \zeta_5 e_2 \\ (b) \quad \bigvee_{\tau_4 \in \mathbf{N}} \zeta_4 \tau_4 &= z_3 \zeta_3 e_1 + z_5 \zeta_5 e_3 \\ (c) \quad \bigvee_{\tau_5 \in \mathbf{N}} \zeta_5 \tau_5 &= z_3 \zeta_3 e_2 + z_4 \zeta_4 e_3. \end{aligned} \quad (16)$$

Falls im folgenden von  $\tau_3, \tau_4, \tau_5$  die Rede ist, so seien diese stets wie in (16) definiert. Setzt man (16) in (14) ein, so erhält man

$$\frac{m}{n} = \frac{\frac{z_3 e_1 e_2 + e_3 \tau_3}{\delta \zeta_4 \zeta_5}}{n} = \frac{\frac{z_4 e_1 e_3 + e_2 \tau_4}{\delta \zeta_3 \zeta_5}}{n} = \frac{\frac{z_5 e_2 e_3 + e_1 \tau_5}{\delta \zeta_3 \zeta_4}}{n} \quad (17)$$

und

$$\begin{aligned} (i) \quad \delta m \zeta_4 \zeta_5 &= z_3 e_1 e_2 + e_3 \tau_3 \\ (ii) \quad \delta m \zeta_3 \zeta_5 &= z_4 e_1 e_3 + e_2 \tau_4 \\ (iii) \quad \delta m \zeta_3 \zeta_4 &= z_5 e_2 e_3 + e_1 \tau_5. \end{aligned} \quad (18)$$

Damit folgt

**Satz 20** Falls die  $\zeta_j$  zueinander und zu den  $e_i$  teilerfremd sind, gelten

$$\delta m \in \mathbf{N} \iff$$

$$(15) \iff (16) \iff (a) \wedge (i) \iff (b) \wedge (ii) \iff (c) \wedge (iii).$$

Falls die über die  $\zeta_j$  und  $e_i$  keine Teilbarkeitsbeziehungen bekannt sind, folgt aus (15),  $(a) \wedge (i)$ ,  $(b) \wedge (ii)$  und  $(c) \wedge (iii)$  jeweils  $\delta m \in \mathcal{N}_3$ , die anderen Implikationen gelten dann nicht mehr unbedingt.

Die Variablen  $\tau_j$  (nach (16) und (18)) haben eine praktische Bedeutung. Falls für ein  $j$ ,  $j \in \{3, 4, 5\}$ ,  $\tau_j = 1$ , so folgt  $\frac{m}{n} \in \mathcal{V}_2$ . Denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} - \frac{1}{d\delta z_3 \zeta_3 z_4 \zeta_4 e_1} &= \frac{\frac{e_1 \tau_5 + z_5 e_2 e_3}{\delta \zeta_3 \zeta_4}}{dz_3 z_4 z_5 e_1 e_2 e_3} - \frac{1}{d\delta z_3 \zeta_3 z_4 \zeta_4 e_1} = \\ &= \frac{e_1 \tau_5 + z_5 e_2 e_3 - z_5 e_2 e_3}{d\delta z_3 z_4 z_5 \zeta_3 \zeta_4 e_1 e_2 e_3} = \frac{\tau_5}{d\delta z_3 z_4 z_5 \zeta_3 \zeta_4 e_2 e_3}. \end{aligned}$$

Da die Darstellung eines Bruches als Summe zweier ägyptischer Brüche in Kapitel 3 behandelt wurde, sollen in diesem Kapitel die  $\tau_j$  möglichst von 1 verschieden sein, um keine Ergebnisse zu erhalten, die schon aus Kapitel 3 folgen.

Umgekehrt gilt jedoch nicht, daß für einen Bruch, der als Summe zweier Stammbrüche darstellbar ist, in allen Darstellungen als Summe dreier Stammbrüche mindestens ein  $\tau_j$  gleich 1 sein muß. Zum Beispiel gilt  $\frac{14}{33} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{132}$  und  $\tau_3 = 5$ ,  $\tau_4 = 17$ ,  $\tau_5 = 23$ .

## 4.2 Die erste Formel

Formel (14) soll nun so umgeformt werden, daß man ihr zumindest Spezialfälle ablesen kann. Nach Satz 20 sind die Bedingungen (a) und (i) zu erfüllen, damit  $\delta m \in \mathbf{N}$  gilt. Man erhält

**Satz 21** *Falls es natürliche Zahlen  $e_1 e_2 e_3 \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5 z_5 d \delta \tau_3$  gibt, die*

$$n = dz_5 e_3 (\delta m \zeta_4 \zeta_5 - e_3 \tau_3) \frac{\zeta_3 \tau_3 - z_5 \zeta_5 e_2}{\zeta_4 e_1}, \quad (19)$$

*mit den Bedingungen*

$$\zeta_4 e_1 \mid \zeta_3 \tau_3 - z_5 \zeta_5 e_2,$$

$$e_1 e_2 \mid \delta m \zeta_4 \zeta_5 - e_3 \tau_3$$

*erfüllen, so gilt  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_3$ .*

**Beweis:** Die beiden Bedingungen des Satzes sind äquivalent zu  $\bigvee_{z_4} z_4 = \frac{\zeta_3 \tau_3 - z_5 \zeta_5 e_2}{\zeta_4 e_1}$ , also zu (a), und zu  $\bigvee_{z_3} z_3 e_1 e_2 = \delta m \zeta_4 \zeta_5 - e_3 \tau_3$ , also zu (i).  $\diamond$

**Bemerkungen:**

a) Außer  $d, \delta, m, \zeta_3$  erscheinen alle Variablen doppelt in der Gleichung und den Bedingungen des Satzes,  $z_4$  und  $z_3$  fehlen.

- b) Falls  $z_4 = 1$ , so bleibt die Bedingung  $\zeta_4 e_1 = \zeta_3 \tau_3 - z_5 \zeta_5 e_2$ , welche zu  $z_5 = \frac{\zeta_3 \tau_3 - \zeta_4 e_1}{\zeta_5 e_2}$  äquivalent ist. In diesem Fall sollte man die Gleichung (a) nach  $z_5$  statt nach  $z_4$  auflösen und somit  $z_5$  aus (14) entfernen.
- c) Ebenso sollte man durch Umformung dafür sorgen, daß  $\delta m \zeta_4 \zeta_5 - e_3 \tau_3 = z_3 e_1 e_2 \neq 1$ , da eine Darstellung von  $n$  in Abhängigkeit von  $m$  gesucht ist.

#### 4.2.1 Spezialfälle

Bisher ist Formel (19) immer noch so komplex, daß man kaum allgemeine Aussagen ableiten kann, da zu viele Variablen vorkommen, die zwei Teilbarkeitsbedingungen erfüllen müssen. Man kann jetzt zunächst einige Variablen gleich 1 setzen, um einfachere Formeln zu erhalten. Nach 4.1 sollte man jedoch stets  $\tau_3 \neq 1$  fordern.

- a) Der einfachste Fall ergibt sich, wenn man alle doppelt auftretenden Variablen außer  $\tau_3$  gleich eins setzt, also  $e_1 e_2 e_3 z_5 \zeta_4 \zeta_5 = 1$ . Es folgt  $n = d(\delta m - \tau_3)(\zeta_3 \tau_3 - 1)$ , wobei die Bedingungen  $1 = \zeta_4 e_1 \mid \dots$  und  $1 = e_1 e_2 \mid \dots$  trivialerweise erfüllt sind. Es gilt  $z_3 := \delta m - \tau_3$  und  $z_4 := \zeta_3 \tau_3 - 1$ . Außerdem folgt nach (16)  $\tau_4 = z_3 \zeta_3 + 1$  und  $\tau_5 = z_3 \zeta_3 + z_4$ , so daß  $\tau_4 \neq 1$  und  $\tau_5 \neq 1$ . Zusammengefaßt gilt

$$n = d(\delta m - \tau_3)(\zeta_3 \tau_3 - 1), \quad z_3 := \delta m - \tau_3, \quad z_4 := \zeta_3 \tau_3 - 1 \implies$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{d\delta\zeta_3 z_3 z_4} + \frac{1}{d\delta\zeta_3 z_3} + \frac{1}{d\delta z_4}$$

Falls also der Nenner  $n$  eines Bruches  $\frac{m}{n}$  das Vielfache eines Produktes aus einem Teiler kongruent  $-\tau_3 \pmod{m}$  und einem weiteren kongruent  $-1 \pmod{\tau_3}$  ist, dann gilt  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_3$ .

- b) Setzt man zusätzlich noch  $z_4 = 1$ , so folgt  $\zeta_3 \tau_3 = 2$ . Man erhält  $\tau_3 = 1 \wedge \zeta_3 = 2$  oder  $\tau_3 = 2 \wedge \zeta_3 = 1$ . Also findet man die Spezialfälle

$$\frac{m}{d(\delta m - 1)} = \frac{1}{2d\delta z_3} + \frac{1}{2d\delta z_3} + \frac{1}{d\delta} = \frac{1}{d\delta z_3} + \frac{1}{d\delta} \quad \text{mit } z_3 = \delta m - 1,$$

und

$$\frac{m}{d(\delta m - 2)} = \frac{1}{d\delta z_3} + \frac{1}{d\delta z_3} + \frac{1}{d\delta} \quad \text{mit } z_3 = \delta m - 2.$$

Falls  $n$  einen Teiler kongruent  $-1$  oder  $-2$  modulo  $m$  hat, dann gilt  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_3$ . Im ersten Fall gilt  $\tau_3 = 1$ , daher ist der Bruch als Summe zweier ägyptischer Brüche darstellbar.

c) Einen anderen Spezialfall erhält man durch  $\zeta_4 e_1 e_2 := 1$ . Durch diese Definition entfallen die Zusatzbedingungen in Satz 21. Sei außerdem  $\zeta_5 := 1$ . Wegen  $\zeta_4, \zeta_5 = 1$  folgt  $\tau_4, \tau_5 \neq 1$  nach (16). Somit gilt

$$\frac{m}{dz_5 e_3 (\delta m - e_3 \tau_3) (\zeta_3 \tau_3 - z_5)} = \frac{1}{d\delta z_3 \zeta_3 z_4} + \frac{1}{d\delta \zeta_3 z_3 z_5} + \frac{1}{d\delta z_4 z_5 e_3}$$

mit  $z_3 := \delta m - e_3 \tau_3$  und  $z_4 := \zeta_3 \tau_3 - z_5$ .

Diese Formel berücksichtigt also 4 Teiler von  $n$ , die existieren müssen, damit  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_3$ . Man kann weitere Spezialfälle ableiten, aber diese werden nicht einfacher.

### 4.3 Die zweite Formel

Eine andere Formel, aus der man andere Spezialfälle ableiten kann, erhält man, wenn man  $\tau_3$  aus Formel (19) entfernt und statt dessen  $z_4$  wieder einfügt.

**Satz 22** *Falls es natürliche Zahlen gibt, die*

$$n = dz_4 z_5 e_3 \left( m\delta\zeta_4\zeta_5 - e_3 \frac{z_4\zeta_4 e_1 + z_5\zeta_5 e_2}{\zeta_3} \right)$$

*mit den Bedingungen*

$$z_3 e_1 e_2 = m\delta\zeta_4\zeta_5 - e_3 \frac{z_4\zeta_4 e_1 + z_5\zeta_5 e_2}{\zeta_3}$$

*und*

$$\zeta_3 \mid z_4\zeta_4 e_1 + z_5\zeta_5 e_2$$

*erfüllen, so gilt  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_3$ .*

Die erste Bedingung ist gleichwertig zu

$$e_1 e_2 \mid m\delta\zeta_4\zeta_5 - e_3 \frac{z_4\zeta_4 e_1 + z_5\zeta_5 e_2}{\zeta_3},$$

denn  $z_3$  erscheint nicht mehr in der Gleichung. Auch  $\tau_3$  fehlt in der Gleichung, nach (16) würde

$$\tau_3 \zeta_3 = z_4 \zeta_4 e_1 + z_5 \zeta_5 e_2$$

gelten. Nur  $d, \delta, m, \zeta_3$  erscheinen einfach, alle anderen Variablen doppelt in der Gleichung und in den Bedingungen.

### 4.3.1 Spezialfälle

a) Seien alle Variablen außer  $\delta, d, m, \zeta_3, e_1$  gleich 1. Dann gilt

$$\frac{m}{d(m\delta - \frac{e_1+1}{\zeta_3})} = \frac{m}{d(m\delta - \tau_3)} = \frac{1}{d\delta z_3 \zeta_3 e_1} + \frac{1}{d\delta z_3 \zeta_3} + \frac{1}{d\delta}$$

mit den Bedingungen  $z_3 := \frac{m\delta - \tau_3}{e_1}$ ,  $e_1 = \zeta_3 \tau_3 - 1$  und  $e_1 \mid m\delta - \tau_3$ . Falls  $n$  einen Teiler kongruent  $-\tau_3 \pmod{m}$  hat, der selber einen Teiler kongruent  $-1 \pmod{\tau_3}$  besitzt, dann gilt  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_3$ . In 4.2.1 a) war eine ähnliche Bedingung gefordert, nur daß dort zwei verschiedene Teiler gefordert waren.

b) Sei zusätzlich noch  $z_3 := 1$ . Dann folgt wegen  $(\zeta_3 \tau_3 - 1)z_3 = m\delta - \tau_3$ , somit  $\tau_3 = \frac{m\delta+1}{\zeta_3+1}$ ,

$$\frac{m}{d(m\delta - \frac{m\delta+1}{\zeta_3+1})} = \frac{1}{d\delta \zeta_3 e_1} + \frac{1}{d\delta \zeta_3} + \frac{1}{d\delta}$$

mit  $e_1 = m\delta - \frac{m\delta+1}{\zeta_3+1}$  und  $\zeta_3 + 1 \mid m\delta + 1$ .

Falls  $d = 1$ , so ist diese Formel für Primzahlennenner  $n$  anwendbar. Es muß dann  $n = m\delta - \tau_3 = \zeta_3 \tau_3 - 1$  gelten. Also, falls  $n + 1$  einen Teiler  $\tau_3$  besitzt, für den  $n = m\delta - \tau_3$  gilt, dann ist  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_3$ .

Da hier  $\zeta_4 = \zeta_5 = 1$  gesetzt ist, ist dies noch nicht die allgemeine Formel für Primzahlennenner, (dazu komme ich erst in Abschnitt 4.4). Es gibt also Brüche, die diese Formel nicht erfüllen und dennoch  $\in \mathcal{N}_3$  sind. Zum Beispiel gilt

$$97 = 14 \cdot 7 - 1 = \zeta_3 \tau_3 - 1$$

$$97 = 4 \cdot 26 - 7 = m\delta - \tau_3$$

also

$$\frac{4}{97} = \frac{1}{26 \cdot 14 \cdot 97} + \frac{1}{26 \cdot 14} + \frac{1}{26},$$

aber  $\frac{4}{73}$  läßt sich nicht nach diesem Verfahren in die Summe dreier Stammbrüche zerlegen, obwohl  $\frac{4}{73} \in \mathcal{N}_3$  gilt, denn kein Teiler von 74 ist kongruent 3 modulo 4.

### 4.3.2 Zusammenfassung der Spezialfälle

Falls  $n$  eine der folgenden Kongruenzen erfüllt, dann gilt  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_3$ .

- 4.2.1 a)  $n \equiv -\tau_3(\zeta_3\tau_3 - 1) \pmod{m(\zeta_3\tau_3 - 1)}$
- 4.2.1 b)  $n \equiv -1 \pmod{m}$  oder  $n \equiv -2 \pmod{m}$
- 4.2.1 c)  $n \equiv -\tau_3(\zeta_3\tau_3 - z_5)z_5e_3^2 \pmod{m(\zeta_3\tau_3 - z_5)z_5e_3}$
- 4.3.1 a)  $n \equiv -\tau_3 \pmod{m}$  und  $\zeta_3\tau_3 - 1 \mid n$
- 4.3.1 b)  $n \equiv -\tau_3 \pmod{m}$  und  $\tau_3 \mid n + 1$

Bevor ich die Liste erweitere, werde ich nun auf Primzahlennenner  $n$  eingehen.

## 4.4 Primzahlennenner

Man versucht Aussagen über Restklassen der Nenner  $n$  zu bekommen, indem man Äquivalenzen  $n \equiv -r \pmod{ml}$ ,  $l \in \mathbf{N}$  wie in 4.3.2 aufstellt. Falls  $(r, ml) = 1$ , so befinden sich in der Restklasse  $n \equiv -r \pmod{lm}$  Primzahlen. Wenn also eine Aussage für eine ganze Restklasse gelten soll, darf sie nicht auf der Existenz echter Teiler beruhen.

Für die Bestimmung solcher Restklassen genügt es also, Nenner zu betrachten, die nicht in Faktoren zerlegt werden sollen. Wenn im folgenden von Primzahlennennern die Rede ist, so ist damit stets gemeint, daß  $n$  eine Primzahl ist, oder eine zusammengesetzte Zahl, deren Teiler nicht bekannt sind, und die auch nicht in Faktoren zerlegt werden soll. Nach (14) gilt  $n = de_1e_2e_3z_3z_4z_5$  und es gibt drei verschiedene Möglichkeiten,  $n$  als Primzahl bzw. Zahl, die nicht in Faktoren zerlegt werden soll, zu wählen,  $n = d$ ,  $n = e_1$  oder  $n = z_3$ . Alle anderen Wahlen führen zu analogen Fällen.

### 4.4.1 $n = d$ sei eine Primzahl

In diesem Abschnitt benötige ich, daß die  $\zeta_j$  zueinander teilerfremd sind. Die Variablen  $e_1, e_2, e_3, z_3, z_4, z_5$  sind gleich 1. Gleichung (14) reduziert sich zu

$$\frac{m}{n} = \frac{\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5}{d\zeta_3\zeta_4\zeta_5}.$$

Ich führe eine Fallunterscheidung durch.

i)  $\zeta_3 = \zeta_4 = 1$

Wegen  $\zeta_5 \mid \zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5$  folgt  $\zeta_5 \mid 2$ . Für  $\zeta_5 = 1$  erhält man

$$\frac{m}{n} = \frac{3}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{m}{n} = \frac{\frac{3}{\delta}}{n} = \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n}$$

je nachdem, ob  $\delta = 1$  oder  $\delta = 3$  gilt. Für  $\zeta_5 = 2$  erhält man

$$\frac{m}{n} = \frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{m}{n} = \frac{\frac{2}{\delta}}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n}$$

je nachdem, ob  $\delta = 1$  oder  $\delta = 2$  gilt.

ii)  $\zeta_3 = 1, \zeta_4, \zeta_5 > 1$

Da die  $\zeta_j$  zueinander teilerfremd sind, sind  $\zeta_4 = 2$  und  $\zeta_5 = 3$  die kleinsten Möglichkeiten. Mit diesen Werten erhält man

$$\frac{m}{n} = \frac{\frac{1+2+3}{6\delta}}{n} = \frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n},$$

$\delta$  muß also gleich 1 gewählt werden. Falls  $\zeta_4, \zeta_5$  größere Werte annehmen, ist  $\zeta_4\zeta_5 > 1 + \zeta_4 + \zeta_5$ , wie man nachrechnen kann. Damit gilt  $\zeta_4\zeta_5 \mid 1 + \zeta_4 + \zeta_5$  nicht mehr, es gibt keine weiteren Darstellungen.

iii)  $\zeta_3, \zeta_4, \zeta_5 > 1$

Schon für  $\zeta_3 = 2, \zeta_4 = 3$  und  $\zeta_5 = 5$  gilt  $2 \cdot 3 \cdot 5 > 2 + 3 + 5$ . In diesem dritten Fall ist also  $\zeta_3\zeta_4\zeta_5 \mid \zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5$  nie möglich, es gibt keine weiteren Darstellungen.

$n = d$  liefert also nur Trivialfälle.

#### 4.4.2 $n = z_3$ sei eine Primzahl

Es gilt hier  $de_1e_2e_3z_4z_5 = 1$  und

$$\frac{m}{n} = \frac{\frac{z_3\zeta_3+\zeta_4+\zeta_5}{\delta\zeta_3\zeta_4\zeta_5}}{z_3}$$

nach (14). Wird diese Gleichung nach  $n = z_3$  aufgelöst, ergibt sich

$$n = m\delta\zeta_4\zeta_5 - \frac{\zeta_4 + \zeta_5}{\zeta_3} = m\delta\zeta_4(\tau_3\zeta_3 - \zeta_4) - \tau_3, \quad (20)$$

wobei  $\tau_3$  gemäß (16) definiert ist.



Ich kann aus diesem Fall wieder Kongruenzen ableiten.

$$n \equiv -\tau_3 \pmod{m\zeta_4(\zeta_3\tau_3 - \zeta_4)}, \quad (21)$$

hierbei wurde  $\delta$  ausgeklammert,

$$n \equiv -\tau_3 - m\delta\zeta_4^2 \pmod{m\delta\tau_3\zeta_4}, \quad (22)$$

es wurde  $\zeta_3$  ausgeklammert,

$$n \equiv -\zeta_5 \pmod{m\delta\zeta_5 - 1}, \quad (23)$$

hier wurde  $\zeta_3 = 1$  gesetzt und  $\zeta_4$  ausgeklammert.

Falls  $n$  eine dieser Kongruenzen erfüllt, ist  $\frac{m}{n}$  als Summe dreier ägyptischer Brüche darstellbar.

Man kann diesen Spezialfall auch anders betrachten. Wegen (13) weiß man, daß  $n = z_3$  zwei der  $a_1, a_2, a_3$  teilen muß. Es gibt also zwei Möglichkeiten, einen Bruch von  $\frac{m}{n}$  zu subtrahieren, um eine Darstellung als Summe dreier Stammbrüche zu erhalten, entweder teilt  $n$  den Nenner dieses Bruches oder  $n$  teilt ihn nicht.

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{\delta\zeta_3\zeta_4z_3} = \frac{m\delta\zeta_3\zeta_4 - 1}{\delta\zeta_3\zeta_4z_3} = \frac{\tau_5}{\delta\zeta_3\zeta_4z_3} \quad \wedge \quad \zeta_5\tau_5 = z_3\zeta_3 + \zeta_4 \quad (24)$$

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{\delta\zeta_4\zeta_5} = \frac{m\delta\zeta_4\zeta_5 - z_3}{\delta\zeta_4\zeta_5z_3} = \frac{\tau_3}{\delta\zeta_4\zeta_5z_3} \quad \wedge \quad \zeta_3\tau_3 = \zeta_4 + \zeta_5 \quad (25)$$

gilt mit (16) und (18). Dabei ist der Bruch mit  $\tau_j$  im Zähler jeweils nach Satz 13 in zwei Stammbrüche zerlegbar.

Aus (25) kann man leicht die Kongruenzen (21), (22), (23) ableiten, aus (24) erhält man

$$n = \frac{\zeta_5\tau_5 - \zeta_4}{\zeta_3} \quad \wedge \quad \tau_5 \equiv -1 \pmod{m\zeta_3\zeta_4} \quad (26)$$

als Bedingungen für  $n$ , falls  $\frac{m}{n}$  aus  $\mathcal{N}_3$  sein soll. Aus (25) folgt mit  $\zeta_4 = \zeta_5 = 1$  die Formel aus 4.2.1 b).

#### 4.4.3 $n = e_3$ sei eine Primzahl

In diesem Fall gilt  $de_1e_2z_3z_4z_5 = 1$  und

$$\frac{m}{n} = \frac{\frac{\zeta_3 + e_3\zeta_4 + e_3\zeta_5}{\delta\zeta_3\zeta_4\zeta_5}}{e_3}$$

nach (14). Mit (16) erhält man

$$m = \frac{1 + e_3\tau_3}{\delta\zeta_4(\tau_3\zeta_3 - \zeta_4)} \implies n = e_3 = \frac{m\delta\zeta_4(\tau_3\zeta_3 - \zeta_4) - 1}{\tau_3}. \quad (27)$$

Leider lassen sich in diesem Fall nicht so ohne weiteres Kongruenzen für  $n$  modulo  $m$  bilden, da durch  $\tau_3$  geteilt wird und  $\tau_3$  nach 4.1 von 1 verschieden sein soll.

Analog zu 4.4.2 kann man wieder zwei Fälle unterscheiden.

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{\delta\zeta_3\zeta_4} = \frac{m\delta\zeta_3\zeta_4 - e_3}{\delta\zeta_3\zeta_4e_3} = \frac{\tau_5}{\delta\zeta_3\zeta_4e_3} \quad \wedge \quad \zeta_5\tau_5 = \zeta_3 + \zeta_4e_3 \quad (28)$$

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{\delta\zeta_4\zeta_5e_3} = \frac{m\delta\zeta_4\zeta_5 - 1}{\delta\zeta_4\zeta_5e_3} = \frac{\tau_3e_3}{\delta\zeta_4\zeta_5e_3} \quad \wedge \quad \zeta_3\tau_3 = \zeta_4 + \zeta_5 \quad (29)$$

Aus (28) erhält man

$$n \equiv -\tau_5 \pmod{m\zeta_4\zeta_3} \quad \wedge \quad \tau_5 \mid \zeta_3 + \zeta_4n \quad (30)$$

und, falls  $\zeta_4 = \zeta_3 = 1$  ist, die Aussage aus 4.3.1 b) für  $\tau_5$  statt  $\tau_3$ . Aus (29) folgt

$$n = \frac{m\delta\zeta_4\zeta_5 - 1}{\tau_3} = m\delta\zeta_4\zeta_3 - \frac{m\delta\zeta_4^2 + 1}{\tau_3} \quad (31)$$

bzw. falls  $\zeta_4 = \delta = 1$

$$n = m\zeta_3 - \frac{m+1}{\tau_3} \implies n \equiv -\frac{m+1}{\tau_3} \pmod{m}. \quad (32)$$

Die Betrachtung von Primzahlennennern und die Feststellung, daß es für solche außer Trivialfällen (4.4.1) nur genau zwei unterschiedliche Möglichkeiten gibt, der Nenner eines Bruches aus  $\mathcal{N}_3$  zu sein, also meinen Abschnitten 4.4.2 und 4.4.3 entsprechend, findet man unter anderem bei [Ai,64], [Be,62], [Jo,76] und [Ros,54]. Auch Kongruenzen findet man bei verschiedenen Autoren, zum Beispiel 4.3.1 b) bei [Ob,50], andere bei [Be,62]. In der Arbeit von

[Be,62] wird außerdem versucht, die Vermutung von Erdős mit Hilfe eines unendlichen Überlagerungssystems, also eines Systems von Kongruenzen zu beweisen, welches aber nicht gelingt.

Um nun Restklassen  $n \bmod m$  zu finden (also nicht  $n \bmod ml$ ,  $l \in \mathbf{N}$ ,  $l > 1$ ), betrachte ich zunächst, welche Repräsentanten dafür in Frage kommen. Da die Repräsentanten kleiner als  $m$  sein sollen, untersuche ich jetzt die Brüche  $\frac{m}{n}$  mit  $n \leq m$ , also Brüche zwischen 1 und 3, für deren Zerlegung in die Summe von Stammbrüchen keine echten Teiler von  $n$  benötigt werden.

#### 4.5 Brüche zwischen 1 und 3

Falls  $2 < \frac{m}{n} \leq 3$ , so müssen wegen  $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  zwei Stammbrüche in einer Darstellung von  $\frac{m}{n}$  als Summe dreier Stammbrüche gleich 1 sein. Also folgt  $\frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{e_3}$ ,  $n = e_3$ ,  $m = 2n + 1$  und somit  $n = \frac{m-1}{2} = m - \frac{m+1}{2}$ . Dies ist ein Spezialfall von (32).

Sei  $1 < \frac{m}{n} \leq 2$ , dann muß 1 einer der Summanden einer Darstellung von  $\frac{m}{n}$  als Summe dreier Stammbrüche sein. Es gilt nämlich  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ ; dies sind alle Möglichkeiten, 1 als Summe dreier Stammbrüche darzustellen. Summen dreier Stammbrüche, die größer als 1 sind und 1 nicht als Summanden besitzen, sind von der Form  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{e_3}$  oder  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = 1 + \frac{1}{30}$ ,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{12}$ ,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{6}$ . Alle diese können daher so umgeformt werden, daß sie 1 als Summanden besitzen.

Da, wie schon gesagt, als Repräsentanten für Restklassen hier nur Zahlen in Frage kommen, die nicht in Faktoren zerlegt werden sollen, gibt es analog zu 4.4.2 und 4.4.3 zwei Möglichkeiten.

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{e_3} = 1 + \frac{1}{\zeta_5} + \frac{1}{\zeta_5 e_3} \implies n = m - \frac{m+1}{\tau_3} \quad (33)$$

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{z_3} = \frac{1}{\zeta_3 z_3} + \frac{1}{\zeta_3 z_3} + 1 \implies n = \frac{\zeta_3 m - 2}{\zeta_3}, \quad (34)$$

wobei (33) Spezialfall von (32) ist und (34) 4.2.1 b) entspricht (also  $\zeta_3 = 1$  oder  $\zeta_3 = 2$ ).

Als Repräsentanten von Restklassen modulo  $m$  erhält man also genau

- $n = m - 1$
- $n = m - 2$
- $n = \frac{m-1}{2}$  falls  $m$  ungerade ist

- $n = m - \frac{m+1}{\tau_3}$ , also für jeden Teiler von  $m + 1$  einen Repräsentanten.

Aus (32) und 4.2.1 b) folgt, daß es für jeden dieser Repräsentanten auch eine Restklasse modulo  $m$  gibt, deren Elemente als Nenner Brüche aus  $\mathcal{N}_3$  ergeben.

Damit können für  $m \leq 20$  nur noch folgende Restklassen Nenner  $n$  enthalten, die nicht als Summe von drei Stammbrüchen darstellbare Brüche ergeben, falls man nur vollständig gekürzte Brüche  $\frac{m}{n}$  betrachtet.

m	n
4	1
5	1
6	1
7	1,2,4
8	1,3
9	1,2,5
10	1,3,7
11	1,2,3,4,6
12	1,5,7
13	1,2,3,4,5,7,8,9,10
14	1,3,5
15	1,2,4,8
16	1,3,5,7,9,11,13
17	1,2,3,4,5,6,7,9,10,12,13
18	1,5,7,11,13
19	1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,16
20	1,3,5,7,9,11

#### 4.6 Die Fälle $m = 4$ und $m = 5$

Im vorigen Abschnitt ist es also gelungen, alle Repräsentanten von Restklassen modulo  $m$  zu finden, deren Elemente eventuell Nenner von Brüchen mit  $\frac{m}{n} \notin \mathcal{N}_3$  sind. Alle anderen Restklassen enthalten nur Nenner, die darstellbare Brüche ergeben.

Der nächste Schritt wäre nun, solche Restklassen modulo  $ml$ ,  $l \in \mathbf{N}$ , zu suchen, um die Mengen der Nenner, für die  $\frac{m}{n} \in \mathcal{N}_3$  damit noch nicht bewiesen ist, zu verkleinern. Dies ist mir aber bisher allgemein nicht gelungen, da für größere Werte von  $m$  sehr viele Restklassen zu untersuchen sind und

da die Zähler  $m$  teils Primzahlen teils zusammengesetzte Zahlen sind und sich daher unterschiedlich verhalten.

Aber an den beiden Beispielen  $m = 4$  und  $m = 5$  möchte ich vorführen, daß mit meinen Kongruenzen aus den letzten Abschnitten im Prinzip das Material bereitgestellt ist, solche Untersuchungen durchzuführen.

Für  $m = 4$  sind nach 4.5 nur noch Nenner mit  $n \equiv 1 \pmod{4}$  zu betrachten. Mit (21) und  $\tau_3 = 3, \zeta_3 = \zeta_4 = 1$  bekommt man die Restklasse  $n \equiv 5 \pmod{8}$ , so daß nur noch die Restklasse  $n \equiv 1 \pmod{8}$  zu untersuchen bleibt.

(21) mit  $\tau_3 = 7, \zeta_3 = \zeta_4 = 1$  liefert  $n \equiv 17 \pmod{24}$ . Falls  $n \equiv 9 \pmod{24}$ , so gilt  $3 \mid n$ , daher bleibt nur die Restklasse  $n \equiv 1 \pmod{24}$ .

Der nächste Modul ist  $840 = 24 \cdot 5 \cdot 7$ . Falls  $n \equiv 25 \pmod{120}$  bzw.  $n \equiv 49 \pmod{168}$ , so wird  $n$  durch 5 bzw. 7 geteilt, wegen  $\frac{4}{5}$  und  $\frac{4}{7} \in \mathcal{N}_3$  ergeben diese Restklassen Brüche aus  $\mathcal{N}_3$ .

(30) liefert für  $\tau_5 = 7$  und  $\zeta_3 = \zeta_4 = 1$  bzw.  $\zeta_3 = 2, \zeta_4 = 1$  die Restklassen  $n \equiv 97 \pmod{168}$  bzw.  $n \equiv 145 \pmod{168}$ .

Aus (21) erhält man mit  $\tau_3 = 3, \zeta_3 = 2, \zeta_4 = 1$  die Restklasse  $n \equiv -3 \pmod{20}$ , daher  $n \equiv 97 \pmod{120}$ , mit  $\tau_3 = 7, \zeta_3 = 1, \zeta_4 = 2$  dann  $n \equiv -7 \pmod{40}$ , daher  $n \equiv 73 \pmod{120}$  und mit  $\tau_3 = 11, \zeta_3 = 2, \zeta_4 = 1$  die Klasse  $n \equiv -11 \pmod{84}$ , somit  $n \equiv 73 \pmod{168}$ .

Insgesamt hat man  $\frac{4}{n} \in \mathcal{N}_3$  daher für alle Restklassen außer  $n \equiv 1, 49 \pmod{120}$  und  $n \equiv 1, 25, 121 \pmod{168}$ , welche zusammengefaßt die Restklassen  $n \equiv 1, 121, 169, 289, 361, 529 \pmod{840}$  ergeben, gezeigt. Weitere Restklassen modulo 840 kann man vermutlich nicht finden, man müßte jetzt zum Modul  $840 \cdot 11 \cdot 13$  übergehen. [Te,71] hat dies getan, er findet 198 Restklassen modulo  $840 \cdot 11 \cdot 13$ , für die  $\frac{4}{n} \in \mathcal{N}_3$  damit nicht bewiesen ist. Es ist nicht schwierig, dieses Ergebnis mit meinen Methoden zu bekommen, man muß nur alle Kongruenzen suchen, die diesen Modul enthalten. Ich möchte aber darauf verzichten, diese vielen Restklassen hier aufzuzählen.

Das Resultat mit den 6 Restklassen modulo 840 findet man bei [Mod,69], [Tr,88] und anderen.

Nun komme ich zu dem Beispiel  $m = 5$ . Es ist nach 4.5 nur noch  $n \equiv 1 \pmod{5}$  zu untersuchen. Falls  $n \equiv 6 \pmod{10}$ , so wird  $n$  durch 2 geteilt, daher bleibt nur  $n \equiv 1 \pmod{10}$ .

Aus (30) erhält man mit  $\tau_5 = 4, \zeta_4 = \zeta_5 = 1$  die Restklasse  $n \equiv 11 \pmod{20}$ , es bleibt  $n \equiv 1 \pmod{20}$  zu testen. Falls  $n \equiv 21 \pmod{60}$ , so ist  $n$  durch 3 teilbar. (21) liefert mit  $\tau_3 = 4, \zeta_3 = \zeta_4 = 1$  die Restklasse  $n \equiv -4 \pmod{15}$ , somit  $n \equiv 41 \pmod{60}$ , damit ist nur noch  $n \equiv 1 \pmod{60}$  übrig.

Mit (30) und  $\tau_5 = 9, \zeta_4 = 1, \zeta_3 = 2$  entsteht die Restklasse  $n \equiv 61 \pmod{180}$ . (22) liefert mit  $\tau_3 = 9, \zeta_4 = \delta = 1$  die Restklasse  $n \equiv -14 \pmod{45}$  und daher  $n \equiv 121 \pmod{180}$ . Damit ist  $n \equiv 1 \pmod{180}$  noch offen.

Schließlich erhält man die Restklassen  $n \equiv 181, 361, 541, 721, 901, 1081 \pmod{1260}$  der Reihe nach aus (22) mit  $\tau_3 = 14, \zeta_4 = 1, \delta = 3$ , aus (22) mit  $\tau_3 = 14, \zeta_4 = 3, \delta = 1$ , aus (22) mit  $\tau_3 = 14, \zeta_4 = \delta = 1$ , wegen  $7 \mid 721$ , aus (21) mit  $\tau_3 = 9, \zeta_4 = 2, \zeta_3 = 1$  und aus (30) mit  $\tau_5 = 4, \zeta_3 = 7, \zeta_4 = 1$ .

$\frac{5}{n} \in \mathcal{N}_3$  ist also für alle  $n$  außer  $n \equiv 1 \pmod{1260}$  gezeigt. Dieses Ergebnis findet man zuerst bei [Pal,58], von [Ste,64] wurde es verbessert zu  $n \equiv 1 \pmod{1260 \cdot 13 \cdot 13}$ . Dies ist mit meinen Methoden wieder nicht schwierig zu zeigen, ich möchte aber hier darauf verzichten.

## 5 Die Vermutung von Schinzel für $\mathcal{N}_3$

In diesem Kapitel soll die Vermutung von Schinzel, daß es für jedes  $m$  ein  $\lambda_m$  gibt, so daß für alle  $n > \lambda_m$  der Bruch  $\frac{m}{n}$  als Summe dreier Stammbrüche darstellbar ist, untersucht werden. (Schinzel hatte die Vermutung eigentlich für  $\mathcal{Z}_3$  ausgesprochen, für  $\mathcal{N}_3$  erscheint sie jedoch auch sinnvoll). Mit Hilfe eines Computerprogramms habe ich für  $m \leq 20$  und  $n < 10\,000$  alle Brüche  $\frac{m}{n}$  auf Darstellbarkeit als Summe dreier ägyptischer Brüche getestet, außerdem habe ich die  $\lambda_m$ -Werte für zwei größere Primzahlen als Zähler  $m$  nach unten abgeschätzt. Dies ist eine Verbesserung der Ergebnisse von [We,74].

### 5.1 Der verwendete Algorithmus

Falls man ohne Computer-Hilfe feststellen möchte, ob ein gegebener Bruch  $\frac{m}{n}$  als Summe dreier Stammbrüche darstellbar ist, so ist der geeigneteste Algorithmus wohl folgender.

Man prüfe zunächst, ob der Nenner Teiler besitzt, die eine Anwendung von Satz 13 gestatten, so daß der Bruch dann sogar als Summe zweier Stammbrüche darstellbar wäre. Ist dies nicht der Fall, subtrahiere man den größtmöglichen Stammbruch  $\frac{1}{a_1}$ ,  $a_1 := a_{1,0}$ , der überhaupt subtrahierbar ist, und teste, ob der Differenzbruch nun in zwei Stammbrüche zerlegbar ist (wieder mit Hilfe von Methoden aus Kapitel 3). Falls noch keine Zerlegung möglich ist, setze man  $a_1 := a_{1,0} + 1$  und subtrahiere den Kehrwert hiervon von  $\frac{m}{n}$ . Man versuche anschließend wieder den Differenzbruch nach Satz 13 zu zerlegen und so fort.

In vielen Fällen braucht man nur  $a_1 \in \{a_{1,0}, a_{1,0} + 1\}$  einzusetzen, um eine Zerlegung zu erhalten. So gilt zum Beispiel für  $m = 4$ , daß 1009 die kleinste Primzahl ist, bei der man erst für  $a_1 := a_{1,0} + 2$  eine Darstellung erhält. Dies folgt aus den Berechnungen in Kapitel 4. Die Zahl 1009 ist die kleinste Primzahl, in den Restklassen modulo 840, die dort angegeben waren, für die dort  $\frac{4}{n} \in \mathcal{N}_3$  nicht gezeigt werden konnte. Sollte  $\frac{m}{n}$  nicht als Summe dreier Stammbrüche darstellbar sein, so ist der Algorithmus langwierig, da alle möglichen Werte für  $a_1$  getestet werden müssen.

Für die Zerlegung mit Computer-Hilfe ist der eben genannte Algorithmus ungeeignet, da Operationen wie Teilersuche viel Rechenzeit benötigen. Der schnellste Algorithmus besteht vermutlich im systematischen Ausprobieren. Man setze wieder  $a_1 := a_{1,0}$ , wobei  $\frac{1}{a_{1,0}}$  wie oben der größtmögliche subtrahierbare Stammbruch ist. Analog setze man  $a_2 := a_{2,0}$ . Falls der Differenz-

bruch  $\frac{m}{n} - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}$  nun von der Form  $\frac{1}{a_3}$  ist, das heißt, falls der Zähler den Nenner teilt, so hat man eine Darstellung gefunden. Ansonsten vergrößere man  $a_2 := a_{2,0} + 1$  und so fort, bis  $a_2$  eine obere Schranke erreicht, die ich unten angeben werde. Dann erhöhe man  $a_1 := a_{1,0} + 1$  und berechne den neuen größtmöglich zu subtrahierenden Bruch  $\frac{1}{a_2}$ . Der Algorithmus besitzt also zwei Schleifen; in der äußeren wird  $a_1$  erhöht, nachdem in der inneren Schleife alle Werte für  $a_2$  getestet wurden. Dabei sind die Schranken für  $a_1$  und  $a_2$  genau die, die im Anschluß zu Satz 3 bestimmt wurden:  $\frac{n}{m} < a_1 < \frac{3n}{m}$  und, falls der Differenzbruch  $\frac{m_1}{n_1}$  als  $\frac{m_1}{n_1} := \frac{m}{n} - \frac{1}{a_1}$  definiert ist,  $\frac{n_1}{m_1} < a_2 < \frac{2n_1}{m_1}$ . Hier gilt dasselbe wie in dem zuerst genannten Algorithmus, in vielen Fällen liefert schon die erste oder zweite Belegung für  $a_1$  eine Zerlegung, so daß der Algorithmus für den Fall, daß eine Darstellung als Summe dreier Stammbrüche existiert, schnell ist. Sollte es keine Darstellung geben so müssen alle Werte für  $a_1$  und  $a_2$  in den obigen Schranken durchlaufen werden. Aber wie schon gesagt die Fälle, in denen keine Darstellung existiert, oder keine Darstellung mit den ersten Belegungen für  $a_1$  sind relativ selten.

Ein anderes Problem besteht darin, daß die intern zur Berechnung benötigten Werte sehr groß werden können. Folgender Term wird berechnet:

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{ma_1a_2 - na_1 - na_2}{na_1a_2}.$$

Um festzustellen, ob dieser Bruch ein Stammbruch ist, muß also  $ma_1a_2 - n(a_1 + a_2) \mid na_1a_2$  getestet werden. Läßt man  $n$  nicht größer als 10 000 werden, so erreicht  $a_1a_2$  schon eine Größenordnung von maximal  $10^{10}$ . Aber  $na_1a_2$  kann Werte bis zu  $10^{15}$  annehmen, dies ist mit den meisten Programmiersprachen als Integergröße nicht mehr zu erreichen, als reelle Zahl vielleicht gerade noch, aber nicht mehr unbedingt bis auf die letzte Ziffer verlässlich. Möchte man noch größere Werte für  $n$  wählen, stößt man in jedem Fall auf Grenzen, für  $n = 100\,000$  nimmt  $na_1a_2$  eine Größenordnung von bis zu  $10^{19}$  an.

Es gibt einen einfachen Trick, die internen Werte etwas kleiner zu halten. Falls  $n$  eine Primzahl ist, so muß  $n$ , falls der Bruch aus  $\mathcal{N}_3$  ist, mindestens eines der  $a_1, a_2, a_3$  teilen. Wegen  $a_1 < \frac{3n}{m}$  ist  $n$  größer als  $a_1$  für  $m > 3$ ,  $n$  kann  $a_1$  also außer in den Trivialfällen  $m \leq 3$  nicht teilen.

Sollte  $n$  nun  $a_2$  teilen, so kann man obigen Bruch kürzen. Man testet dann nur  $ma_1 \frac{a_2}{n} - a_1 - a_2 \mid a_1a_2$ . Andernfalls muß  $n \mid a_3$  gelten, falls der Bruch aus  $\mathcal{N}_3$  ist, also ist  $ma_1a_2 - na_1 - na_2 \mid a_1a_2$  zu prüfen. In beiden Fällen sind die Werte erheblich kleiner als oben.



Diese Variante des Algorithmus ist aber nur anwendbar, falls  $n$  eine Primzahl ist. Das bedeutet, wenn dieser Algorithmus feststellt, daß für ein festes  $m$  ein Nenner  $n$  keinen Bruch aus  $\mathcal{N}_3$  liefert, so ist dies richtig, wenn  $n$  eine Primzahl ist, ist  $n$  zusammengesetzt, könnte es falsch sein.

Ich konnte jedoch feststellen, daß der Algorithmus für  $m < 20$  und  $1000 < n < 10000$  fast nur Primzahlen findet, für die  $\frac{m}{n} \notin \mathcal{N}_3$ , so daß er in diesem Bereich problemlos anwendbar ist. Die Vermutung von Schinzel scheint also für zusammengesetzte Nenner auf jeden Fall richtig zu sein, aber meines Wissens nach existiert selbst dafür bisher kein Beweis.

## 5.2 Die Ergebnisse

Es folgt nun eine Tabelle, in der für  $m \leq 20$  Nenner angegeben sind, für die  $\frac{m}{n} \notin \mathcal{N}_3$ . In [We,74] findet man auch eine solche Tabelle, aber dort wurden nur Primzahlen als Nenner berücksichtigt. Webb testete  $m$  und  $n$  in folgenden Bereichen

$$m \in \{6, 7, 12\} \wedge n \leq 100000$$

$$m \in \{7, \dots, 11\} \wedge n \leq 25000$$

$$m \in \{13, \dots, 18\} \wedge n \leq 5000$$

Für  $m = 6$  und  $m = 7$  gibt es in diesem Bereich keine Nenner mit  $\frac{m}{n} \notin \mathcal{N}_3$ . Seine Tabelle enthält drei Fehler. Bei  $m = 12$  hat er die Restklasse kongruent  $7 \pmod{12}$  vergessen, bei  $m = 17$  fehlt  $n = 43$  und bei  $m = 18$  muß  $n = 433$  statt  $n = 443$  stehen.

Ich habe die Tabelle um zusammengesetzte Zahlen erweitert, die ich in der Tabelle allerdings zur Kennzeichnung eingeklammert habe. Wie oben schon erwähnt, sind Brüche mit zusammengesetzten Zahlen als Nenner seltener nicht als Summen dreier Stammbrüche darstellbar. Allerdings zeigt meine Untersuchung nun, daß  $\lambda_{14} \geq 841 = 29^2$  gilt, während Webb hier nur  $\lambda_{14} \geq 353$  erhalten hatte.

In der Tabelle sind die Werte für  $n$  in Restklassen modulo  $m$  eingeteilt, jedes Kästchen enthält eine Restklasse. Für  $m \leq 11$  wurde  $n \leq 25\,000$ , für  $12 \leq m \leq 20$  wurde  $n \leq 10\,000$  und für  $m = 20$  wurde  $n < 9000$  getestet. Es wurden zunächst mit Methoden aus Kapitel 4 Moduln bestimmt, für die  $\frac{m}{n}$  mit diesen Methoden nicht bewiesen ist, dann wurden die Elemente dieser Restklassen als Nenner  $n$  getestet.

m													
8	1,17,241			3,11,131									
9	1,19			2,11		5							
10	1,11,61,181			3,43		7,67							
11	1			2		3		4,37					
12	1,13,(25),37,73,97 193,433,577,1129,1657 1873,2521,2593,3433 10369,12049,12241			5,29		7,31							
13	1,(14),53,79			2,67		3,211		(4)	5	7	281	61	
14	1,29,(841)			3,17,59,353		5,19,257							
15	1,(16),31,61 151,(226),271 541,1171,4201			2,17,47,(122) 137,197,1367		(4),19 (34),79		(8),23,53 113,233 1103					
16	1,17,(33),97 113,193,241,257 577,593,641,769 1201,1489,2113 2689,3169,3361 4801,4993,5281			3,131		5,37 421		7,23 167 (9),73 (121) 2521	11	13			
17	1,1123   2,19,53			3,71		(4),157		5,73	(6),23	7,41 2081	(9),43 281	13 421	
18	1,19,37,73 109,181,379 397,433,541 613,811,1009 1297,2269			5,23,41 59,113 131,149 239,599 761		7,61 223 457		11,29 47,137 281,389 821,911 2819	13,31 193 661 1381				
19	1,229   2,97   3,41 193			(4),23 137		5,43		(6),(82)	7,(26)	(8),(46)	(10),29 181	11 353	13
20	1,(21),41,61,(81) (121),181,241 401,421,601,641 761,1201, 1451 (1681),1801,2161 2341,2521,2801 3121,4201,4801 5441,5521,5641 6361,8167,8761			3,23,43 83,103,163 223,383,503		7,(27),47 67,107,127 167,347 887,907 1607,2687 3467,4507 4967		(9),29 (69),89 149,(489) 809 1049	11				

Zusätzlich habe ich noch  $m = 23$  und  $m = 29$  für  $6\,000 < n < 9\,500$  untersucht. Hier habe ich nicht versucht, alle Werte für  $n$  zu finden, sondern nur ein möglichst großes  $n$ .

Damit erhält man als untere Schranken der  $\lambda_m$ -Werte

m	$\lambda_m$
8	241
9	19
10	181
11	37
12	12241
13	281
14	841
15	4201
16	5281
17	2081
18	2819
19	353
20	8761
23	6947
29	8269

Man kann folgende Beobachtungen festhalten und vermuten, daß dies auch für größere Zähler  $m$  gilt.

- Es gibt Restklassen modulo  $m$ , die keine Nenner enthalten, welche einen Bruch ergeben würden, der nicht aus  $\mathcal{N}_3$  ist, und trotzdem konnte dies für die Restklassen mit Methoden aus Abschnitt 4.5 nicht bewiesen werden. Dies trifft auf die Restklassen  $6 \bmod 11$ ,  $10 \bmod 13$ ,  $8, 10, 12 \bmod 17$  und  $12, 16 \bmod 19$  zu.
- Für Primzahlzähler gibt es im allgemeinen weniger nicht als Summe dreier ägyptischer Brüche darstellbare Zahlen als für zusammengesetzte Zähler und  $\lambda_m$  ist kleiner. Jedoch gibt es mehr Restklassen, die  $n$  mit  $\frac{m}{n} \notin \mathcal{N}_3$  enthalten, und die  $n$ -Werte sind in der Tabelle auf diese Restklassen ziemlich gleichmäßig verteilt.
- Falls  $m$  zusammengesetzt ist, gibt es weniger Restklassen, die Nenner  $n$  enthalten, welche nicht darstellbare Brüche ergeben. Insbesondere die Restklasse kongruent 1 modulo  $m$  enthält viele solche  $n$ , und insbesondere die großen Werte von  $n$  befinden sich oft in dieser Restklasse.

- zusammengesetzte Nenner liefern seltener nicht darstellbare Brüche.

Für einen Bruch ist es daher vorteilhaft, einen Primzahlzähler und einen zusammengesetzten Nenner zu haben, wenn er in die Summe von Stammbrüchen zerlegt werden soll.

## 6 Schlußbemerkung

Hiermit beende ich nun meine Arbeit. Leider ist es mir nicht gelungen, eine der Vermutungen, die im Zusammenhang mit ägyptischen Brüchen noch bestehen, zu beweisen oder zu widerlegen.

Ich habe mich bemüht, die Darstellung eines Bruches als Summe zweier oder dreier Stammbrüche systematisch zu untersuchen und nicht durch Probieren lediglich Ergebnisse für einzelne Zähler  $m$  zu erhalten. Daher liefert meine Arbeit eher Methoden als konkrete Ergebnisse für konkrete  $m$ . Man hätte zum Beispiel in Kapitel 4 nur die Kongruenzen, die man tatsächlich benötigt, herleiten und beweisen können. Stattdessen habe ich versucht zu zeigen, wie man Kongruenzen systematisch entwickeln kann. Ich würde nicht ausschließen, daß man mit meinen Methoden, wenn man sie weiter fortführt, nicht vielleicht doch noch neue Erkenntnisse über Stammbrüche bekommen könnte.

## Literaturverzeichnis

Ich habe mich bemüht, das Literaturverzeichnis in bezug auf die in der Arbeit behandelten Themen besonders ausführlich zu halten. Ich habe einige Titel aufgenommen, auf die ich in der Arbeit nicht eingehen konnte. Ein ausführlicheres Literaturverzeichnis auch zu anderen Themen (weitere Algorithmen, Beschränkung der Nenner auf bestimmte Mengen, z.B. Potenzen, Elemente einer arithmetischen Progression u.a.) ist von Paul Campbell zu erhalten [Cam,85]. Weitere Literatur findet man in [Gu,81] und [Re,81], außerdem verweise ich auf die Rubrik D68 in den *Reviews in Number Theory*. Literatur zur Diskussion um die  $2/n$ -Tabelle, findet man in *Reviews in Number Theory* Z15-227.

In eckigen Klammern befinden sich teilweise kurze Inhaltsangaben, die Abkürzungen habe ich zumeist von [Cam,85] übernommen.

BE	Bleicher-Erdős-Algorithmus von 1976
FS	Farey-Folgen-Algorithmus von Bleicher 1968
F-S	Fibonacci-Sylvester-Algorithmus
M	Multiplikationsalgorithmus
SM	Splitting-Methode
$\mathcal{V}_s, \mathcal{N}_s$	wie in Definition 1 aus Kapitel 1
Erd-Str	die Erdős-Straus-Vermutung
h	historische Bemerkungen
int	Darstellung der 1 und anderer ganzer Zahlen
Kiss	die Kiss-Vermutung
odd	nur Kehrwerte ungerader Zahlen sind zugelassen
op	die optische Gleichung
pr	praktische Zahlen
pw	Potenzen als Nenner
Sch	die Schinzel-Vermutung
Sierp	die Sierpiński-Vermutung
ss	als Nenner sind nur die Zahlen bestimmter Mengen zugelassen

Abkürzungen von Zeitschriften

AMM	American Math. Monthly
JNT	Journal Number Theory
MR	Mathematical Reviews
ZBL	Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete

- [**Ah,86**] Ahmadi, Mohammad-Hossain, A generalization of the conjectures of Erdős-Straus and Sierpinski. Dissertation, University of Wisconsin-Madison. Abstract: *Abstr. Amer. Math. Soc.* 8 (1987). [Erd-Str, Sierp,  $\mathcal{V}_3$ ,  $\mathcal{V}_2$ ]
- [**AhSl,73**] Aho, A. V. und N. J. A. Sloane, Some doubly exponential sequences. *Fib. Quart.* 11 (1973) 429-438 (MR 49# 209). [int]
- [**Ai,64**] Aigner, Alexander, Brüche als Summe von Stammbrüchen, *J. Reine Angew. Math.* 214/215 (1964) 174-179 (MR 28# 3969). [Erd-Str, Sierp, Sch,  $\mathcal{V}_3$ ]
- [**Alli,63**] van Albada, P. J. und J. H. van Lint, Reciprocal bases for the integers, *AMM* 70 (1963) 170-174 (MR 26#4964). [ss, int]
- [**An,1871**] André, Désiré, Analyse indéterminée: Problèmes, *Nouvelles Annales de Math.* (2) 10 (1871) 295-301. [op], siehe auch [Di,20].
- [**Ba,76**] Barbeau, E. J., Query on prime reciprocal sums, *J. Recr. Math.* 9 (1976/77) 29. [ss]
- [**Ba,77**] Barbeau, E. J., Expressing one as a sum of distinct reciprocals: comments and a bibliography, *Eureka* (Ottawa) 3 (1977) 178-181. [int]
- [**Baw,89**] Barwell, Brian, A perfect parallelepiped: Solution to Problem 1639, *J. Recr. Math.* 21 (1989) 153. [op]
- [**Bs,68**] Bartoš, Pavel, A certain system of Diophantine equations, *Casopis Pest. Math.* 93 (1968) 484-488 (MR 50# 7019).
- [**Bs,70a**] Bartoš, Pavel, On prolongable solutions of the optical equation, *Casopis Pest. Math.* 95 (1970) 278-289 (MR 42# 7589). [op]
- [**Bs,70b**] Bartoš, Pavel, A remark on the number of solutions of the equation  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a}{b}$  in natural numbers, *Casopis Pest. Math.* 95 (1970) 411-415 (MR 43# 1919). [op]
- [**BsPe,71**] Bartoš, Pavel und Katarina Pehartzová-Bosantká, On the solution of the Diophantine equation  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a}{b}$ , *Casopis Pest. Math.* 96 (1971) 294-299 (MR 44# 6596). [op]
- [**Bs,73a**] Bartoš, Pavel, Über gewisse Eigenschaften der optischen Gleichung, *Casopis Pest. Math.* 98 (1973) 300-304, 316 (MR 47# 8410).

- [**Bs,73b**] Bartoš, Pavel, On the solvability of the Diophantine equation  $\sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j} = \frac{a}{b}$ , *Casopis Pest. Math.* 98 (1973) 261-264 (MR 48# 5997).
- [**Bs,74a**] Bartoš, Pavel, A certain system of Diophantine equations, *Casopis Pest. Math.* 99 (1974) 168-172 (MR 50# 7020). [op]
- [**Bs,74b**] Bartoš, Pavel, A remark on the number of the solutions of the optical equation, *Casopis Pest. Math.* 99 (1974) 173-176 (MR 50# 7018). [op]
- [**Bs,75**] Bartoš, Pavel, On the number of solutions of the optical equation II, *Casopis Pest. Math.* 100 (1975) 273-275 (MR 52# 3046).
- [**Bee,89**] Beeckmans, Laurent, Fractions égyptiennes: algorithmes et équations diophantiennes. Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de Licencié en Sciences Mathématiques, Université Libre de Bruxelles. [SM,  $\mathcal{V}_2$ , Erd-Str, Sierp]
- [**Bd,67**] Bende, Sandor, The Diophantine equation  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{x_i}} = 1$  and its connection with graph theory and information theory, *Mat. Lapok* 18 (1967) 323-327 (MR 39# 1340).
- [**Bn,61**] Benson, Arne, Resistance circuits and things synthesized by number theory, *Math. Mag.* 34 (1960/61) 125-130 (MR 23# A1590). [op]
- [**Ber,62**] Bernstein, Leon, Zur Lösung der diophantischen Gleichung  $\frac{m}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ , insbesondere im Fall  $m = 4$ , *J. Reine Angew. Math.* 211 (1962) 1-10 (MR 26# 77). [Erd-Str]
- [**B1,68**] Bleicher, Michael N., Egyptian fractions, in A. Beck et al., *Excursions into Mathematics*, New York, Worth, 1968, pp. 414-434. [FS, F-S, SM]
- [**B1,72**] Bleicher, M. N., A new algorithm for the expansion of Egyptian fractions, *JNT* 4 (1972) 342-382 (MR 48# 2052).[h, M, F-S]
- [**B1Er,73/75**] Bleicher, M. N. und Paul Erdős, The number of distinct subsums of  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N}$  (Abstract 706-10-3), *Notices Amer. Math. Soc.* 20 (1973) A-516, auch in *Math. Comput.* 29 (1975) 29-42 (MR 51# 3041).

- [**BlEr,76**] Bleicher, M. N. und Paul Erdős, Denominators of Egyptian fractions, *JNT* 8 (1976) 157-168 (MR 53# 7925). II, *Illinois J. Math.* 20 (1976) 598-613 (MR 54# 7359). [h,BE]
- [**Bor,32a**] Bortolotti, Ettore, Il calcolo delle unità frazionarie presso gli antichi egizi e le frazioni continue ascendenti, *Atti dell'Accademia di Scienza di Bologna* (8) 9 (1932) 85-93. [F-S, op]
- [**Bor,32b**] Bortolotti, Ettore, La propagazione della Scienza attraverso i secoli, *Scientia* 52 (1932) 273-286. [F-S, op]
- [**Bot,65**] Botts, Truman, Problem solving in mathematics, I and II, *Math. Teacher* 59 (1965) 496-501. [SM]
- [**Bot,67**] Botts, Truman, A chain reaction process in number theory, *Math. Mag.* 40 (1967) 55-65 (MR 35# 119). [SM]
- [**Boy,75**] Boyd, David W., The asymptotic number of solutions of a diophantine equation from coding theory, *J.Comb. Theory* Ser. A 18 (1975) 210-215 (MR 50# 12887).
- [**Brn,84**] Brenner, J. L., Asymptotic solution of the problems of Erdős and Sierpinski concerning  $M/N$ , *Pi Mu Epsilon Journal* 8 (1984) 24-28. [Erd-Str, Sierp]
- [**Br,54**] Breusch, Robert, A special case of Egyptian fractions: Solution to Advanced Problem 4512, *AMM* 61 (1954) 200-201. [odd]
- [**Bur,73**] Burshtein, Nehemia, On distinct unit fractions whose sum equals 1, *Discrete Math.* 5 (1973) 201-206 (MR 47# 3290). [int]
- [**Bus,61**] Bush, L. E., The 1960 William Lowell Putnam Competition, *AMM* 68 (1961) 629-637. [op]
- [**Cam,77**] Campbell, Paul J., The splitting method for Egyptian fractions is an algorithm, Abstract: *Notices Amer. Math. Soc.* 26 (1979) A-191. [SM]
- [**Cam,78**] Campbell, Paul J., A "practical" approach to Egyptian fractions, *J. Recr. Math.* 10 (1977/78) 81-86. [M, F-S, SM, pr]
- [**Cam,91**] Campbell, Paul J., *Bibliography of algorithms for Egyptian fractions*, zu erhalten von P.Campbell, Beloit College, Beloit, WI 53511.



- [**Cap,27**] Capello, Giuseppe, Sulle soluzioni positive ed intere della  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$ , *Boll. di Mat.* 23 (1927) 41-44. [op]
- [**Ci,24**] Ciamberlini, Corrado, Sui problemi della vasca e dei rubinetti, *Boll. di Mat.* 20 (1924) 119-122. [op]
- [**Ci,30**] Ciamberlini, Corrado, Sull'equazione indeterminata:  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_{n+1}}$ , *Boll. di Mat.* 26 (1930) 31-32. [op]
- [**Ci,34a**] Ciamberlini, Corrado, Risoluzione dell'equazione indeterminata  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a}{m}$ , *Periodico di Mat.* (4) 14 (1934) 54-55. [op]
- [**Ci,34b**] Ciamberlini, Corrado, Sul numero delle soluzioni (interi e positive) dell'equazione:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{m}$ , *Periodico di Mat.* (4) 14 (1934) 119. [op]
- [**Co,73**] Cohen, Robert, Egyptian fraction expansions, *Math. Mag.* 46 (1973) 76-80. (MR 47# 3300). [Erd-Str]
- [**Cul,79**] Culpin, D. und D. Griffiths, Egyptian fractions, *Math. Gazette* 63 (1979) 49-51 (MR 80d# 10014). [ $\mathcal{V}_2$ ]
- [**Cur,22**] Curtiss, D. R., On Kellogg's Diophantine problem, *AMM* 29 (1922) 380-387. [F-S, int]
- [**Di,20**] Dickson, L. E., *History of the Theory of Numbers*, II: The Diophantine Analysis, Washington, 1920, 688-691. [h, op]
- [**Dud,69**] Dudley, Underwood, *Elementary Number Theory*, San Francisco, Freeman, 1969, pp. 54, 232. [op]
- [**Dud,81**] Dudley, Underwood, Sums of divisors: Solution to Problem 1009, *J. Recr. Math.* 14 (1981/82) 304-304. [ $\mathcal{Z}_s$ ]
- [**DuGr,66**] Dunton, M. und R. E. Grimm, Fibonacci on Egyptian fractions, *Fib. Quart.* 4 (1966) 339-354 (MR 34# 7318). [h, Übersetzung von Teilen aus [Pi,1202]]
- [**Er,32**] Erdős, Paul, Egy Kürschák-féle elemi számelméleti tétel általánosítása, *Mat. es Phys. Lapok* 39 (1932) 17. [int]
- [**Er,50**] Erdős, P., On the solution of  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = \frac{a}{b}$  in positive integers, *Mat. es Phys. Lapok* 1 (1950) 192-210 (MR 13, 208b). [M, pr]

- [**Er,63** ] Erdős, P., *Quelques Problèmes de la Théorie des Nombres*, Monographie de l'Enseignement Math., No. 6, Problèmes 72, 73, 74. [int, Erd-Str, Sierp]
- [**ErSn,63** ] Erdős, P. und Sherman Stein, Sums of distinct unit fractions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 14 (1963) 126-131 (MR 26# 71). [ss, int]
- [**ErSt,71** ] Erdős, P. und E. Straus, Representation of 1 by Egyptian fractions: Solution to Elementary Problem E2232, *AMM* 78 (1971) 302-303. [int]
- [**Er,74** ] Erdős, P., Bounds for Egyptian fraction partitions of unity: Comment on Elementary Problem E2472, *AMM* 81 (1974) 780-782. [int]
- [**ErSt,75** ] Erdős, P., E. G. Straus und andere, Solution to Problem 387, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 23 (1975) 183-189. [int, s, odd]
- [**ErGr,80** ] Erdős, P. und R. L. Graham, *Old and New Problems and Results in Combinatorial Number Theory*, L'Enseignement Mathématique, Université de Genève, 1980, pp. 30-44. [F-S, odd, Erd-Str, Sch,  $\mathcal{N}_3$ , pw, int]
- [**Ern,80** ] Ernest, P., On the adequacy of the Egyptian representation of fractions, *Bull of the Inst. of Math. and Its Applicat.* 16 (1980) 219-221 (MR 82m# 10014). [F-S]
- [**Fr,78** ] Franceshine, Nicola, *Egyptian fractions* M. A. Dissertation, Dept. of Math., Sonoma State College, California (1978). [Erd-Str]
- [**Ga,78** ] Gardner, Martin, Mathematical games: Puzzles and number-theory problems arising from the curious fractions of ancient Egypt, *Scientific Amer.* 240:4 (1978) 23-30, 188. [h, F-S, SM, Erd-Str, Sierp, ss, odd]
- [**Go,62** ] Golomb, Solomon W., An algebraic algorithm for the representation problems of the Ahmes papyrus, *AMM* 69 (1962) 785-787. [M]
- [**Go,73** ] Golomb, Solomon W., On representing an integer as the harmonic mean of integers, *Math. Mag.* 46 (1973) 241-244 (MR 48# 2049). [Erd-Str]
- [**Gr,63** ] Graham, R. L., A theorem on partitions. *J. Australian Math. Soc.* 4 (1963) 435-441 (MR 29# 64). [int]

- [Gr,64 ] Graham, R. L., On finite sums of unit fractions, *Proc. London Math. Soc.* (3) 14 (1964) 193-207 (MR 28# 3968). [ss]
- [Gr,71 ] Graham, R. L., On sums of integers taken from a fixed sequence, *Proc. Wash. State Univ. Conf. on Number Theory* , 1977. [ss, h, survey of complete sequences, additional bibliography items]
- [Gu,81 ] Guy, Richard K., *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer Verlag, D11. [Erd-Str, Sierp]
- [Gu,85 ] Guy, Richard K., *Unsolved Problems in Number Theory*, Errata and Addenda, Preprint.
- [Ha,72 ] Hahn, H. S., Old wine in new bottles: Solution to Problem E2327, *AMM* 79 (1972) 1138. [int]
- [He,90 ] Head, Mark A., Integer solutions of  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ , *Physics Teacher* (1990) 617. [op]
- [HoMi,85 ] Hofmeister, Gerd und Christel Mittelbach, Ägyptische Stammbrüche in der Zahlentheorie, *Forschungsmag. der Joh. Gutenberg Univ.* (2) (1985) 61-63. [h, Erd-Str]
- [HoSt,85 ] Hofmeister, Gerd und Peter Stoll, Note on Egyptian fractions, *J. Reine Angew. Math.* 362 (1985) 141-145. [ $\mathcal{V}_2$ ]
- [Hol,65 ] Holzer, Ludwig, *Zahlentheorie Teil III* Teubner, Leipzig, 1965, Sect A, 1-27 (MR 34# 4186).
- [Je,82 ] Jeggo, Christopher R., Unit fractions: Solution to Problem 1104, *J. Recr. Math.* 15 (1982/83) 233. [op]
- [JoSo,74 ] Johanssen, Dag Magne und Trond V. Søhus, On unit fractions, *Nordisk Mat. Tidsskr.* 22 (1974) 103-107, 135 (MR 55# 252). [F-S,  $\mathcal{V}_s$ ]
- [Jo,78 ] Johanssen, Dag Magne, On unit fractions II, *Nordisk Mat. Tidsskr.* 25/26 (1978) 85-90, 111-112 (MR 80a# 10010). [F-S,  $\mathcal{V}_s$ ]
- [Jol,76 ] Jollensten, Ralph W., A note on the Egyptian Problem, *Proc. of the 7th Southeast. Conf. on Comb., Graph Theory and Comp.* Congr. Numerantium No. XVIII, Winnipeg, Manitoba, 1976, pp. 351-364 (MR 55# 2746). [Erd-Str]

- [**Ke,21**] Kellogg, O. D., On a Diophantine problem, *AMM* 28 (1921) 300-303. [F-S, int]
- [**Ki,59**] Kiss, Ernest, Some remarks on a Diophantine equation, *Acad. R. P. Romine Fil. Cluj. Stud. Cerc. Math.* 10 (1959) 59-62 (MR 23# A2376). [Erd-Str]
- [**Ki,60**] Kiss, Ernest, Remarks on the representation of fractions between 0 and 1 as the sum of unit fractions, *Acad. R. P. Romine Fil. Cluj. Stud. Cerc. Math.* 11 (1960) 319-323 (MR 26# 1278). [Sierp, Kiss, Sch]
- [**Kie,76**] Kierstead, Friend H., A brute force program: Solution to Computer Challenge Corner Problem 477, *J. Recr. Math.* 10 (1977/78) 47-49. [int, odd]
- [**KlWa,91**] Klee, Victor und Stan Wagon, *Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Math. Ass. of Amer., Washington, DC. [F-S]
- [**Kü,18**] Kürschák, József, A harmonikus sorrol, *Mat. es Phys. Lapok* 27 (1918) 299-300. [int]
- [**La,70**] Lawson, Denis, Ancient Egypt revisited, *Math. Gazette* 54 (1970) 293-296 (MR 58# 10697). [F-S]
- [**Li,81**] Li, Delang, On the equation  $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ , *JNT* 13 (1981) 485-494 (MR 83e# 10026). [Erd-Str]
- [**Li,82**] Li, Delang, Letter to the editor: On the equation  $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ , *JNT* 15 (1982) 282 (ZBL 485.10015). [Erd-Str]
- [**Liu,84**] Liu, Yuanzhang, On question of unit fraction, *J. Sichuan Univ. Math. Sci.* No. 2 (1984) 113-114 (ZBL 537.10010). [Die 21 Lösungen von  $\frac{5}{121} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ]
- [**Lix,89**] Lixandroiu, Dorin, Algorithms for decomposition into unit fractions, *Gaz. Mat. Perfect Metod. Metodol Mat. Inf.* 10 (1989) 133-134 (ZBL 706.11006). [2 Algorithmen werden gegeben]
- [**Lo,71**] Loeb, Arthur L., *Color and Symmetry* Wiley, 1971, pp. 16, 112-113, 117. [op]

- [**Ma,87**] Mays, Michael E., A worst case of the Fibonacci-Sylvester expansion, *J. Comb. Math. and Comb. Comp.* 1 (1987) 141-148 (ZBL 621.10009). [F-S]
- [**Mig,31**] Mignosi, G., Sulla equazione dell'Ottica, *Rend. Cir. Mat. di Palermo* 55 (1931) 456-476. [op]
- [**Mit,88a**] Mittelbach, Frank, Algorithmen zur Berechnung von Stammbruchzerlegungen, *Mainzer Seminarberichte* 2 (1988) 21-35. (ZBL 639.10015).
- [**Mit,88b**] Mittelbach, Frank, Anzahl- und Dichteuntersuchungen bei Stammbruchzerlegungen von Brüchen, thesis, Joh. Gutenberg Univ., Mainz, 1988. [ $\mathcal{N}_2$ ]
- [**Mon,79**] Montgomery, Peter L., Egyptian fractions: Solution to Elementary Problem E2689, *AMM* 86 (1979) 224. [int]
- [**Mod,69**] Mordell, L. J., *Diophantine Equations*, Academic Press London, 1969, pp.287-290.
- [**Mos,45**] Moser, Leo, A minor curiosity, *Scripta Math.* 14 (1945) 61. [op]
- [**Na,39**] Nakayama, Masayosi, On the decomposition of a rational number into "Stammbrüche", *Tohoko Math. J.* 46 (1939) 1-21 (MR 1, 134c). [ $\mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$ ]
- [**Ob,36**] Obláth, Richard, Über einen arithmetischen Satz von Kürschák, *Comment. Math. Helvetici* 8 (1936) 186-187. [int]
- [**Ob,50**] Obláth, Richard, sur l'équation Diophantienne  $\frac{4}{n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ , *Mathesis* 59 (1950) 308-316 (MR 12, 481h). [Erd-Str]
- [**Ow,68**] Owings, J. C., Another proof of the Egyptian fraction theorem, *AMM* 75 (1968) 777-778. [SM]
- [**Pad,33**] Padoa, Alessandro, Le unità frazionarie, *Periodico di Mat.* (4) 13 (1933) 87-98. [F-S,  $\mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3$ ]
- [**Pad,34**] Padoa, Alessandro, Le frazioni scindibili in due unità frazionarie, *Periodico di Mat.* (4) 14 (1934) 47-53. [op]

- [**Pal,58**] Palamà, Giuseppe, Su una congettura di Sierpiński relativa alla possibilità in numeri naturali della  $\frac{5}{n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ , *Boll. della Unione Mat. Italiana* (3) 13 (1958) 64-72 (MR 20# 3821). [Sierp]
- [**Pal,59**] Palamà, Giuseppe, Su di una congettura di Schinzel, *Boll. della Unione Mat. Italiana* (3) 14 (1959) 82-94 (MR 22# 7989). [Sch]
- [**Pi,1202**] Pisano, Leonardo, *Scritti*, Boncompagni, Rome, 1857. [Übersetzung von Teilen dieses Werkes in [DuGr,66]]
- [**Po,61**] Popovici, Constantin P., On the Diophantine equation  $\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ , *An. Univ. Bucuresti Ser. Sti. Natur. Mat.-Fiz.* 10 (1961) 29-44 (MR 30# 3060). [ $\mathcal{N}_3$ ]
- [**Ra,66**] Rav, Yehuda, On the representation of rational numbers as a sum of a fixed number of unit fractions, *J. Reine Angew. Math.* 222 (1966) 207-213 (MR 32# 7498). [ $\mathcal{V}_s$ ]
- [**Re,81**] Rees, Charles S., Egyptian fractions, *Math. Chronicle* 10 (1981) 13-30 (MR 82m: 10016). [F-S, FS, M,  $\mathcal{Z}_s$ , Erd-Str, int]
- [**Ros,54**] Rosati, Luigi Antonio, Sull'equazione diofantea  $\frac{4}{n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$  *Boll. della Unione Mat. Ital.* (3) 9 (1954) 59-63 (MR 15, 684c). [Erd-Str]
- [**Ru,22**] Ruggeri, Carlo, Le soluzioni intere della equazione  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ , *Boll. di Mat.* 18 (1922) 10-15. [op]
- [**Sal,47**] Salzer, H. E., The approximation of numbers as sums of reciprocals, *AMM* 54 (1947) 135-142 (MR 8, 534c). [F-S]
- [**Sal,48**] Salzer, H. E., Further remarks on the approximation of numbers as sums of reciprocals, *AMM* 55 (1948) 350-356 (MR 10, 18c). [F-S]
- [**San,24**] Sansone, G., Su alcuni problemi di analisi indeterminata, *Boll. di Math.* 20 (1924) 33-38. [op]
- [**Sc,56**] Schinzel, André, Sur quelques propriétés des nombres  $3/n$  et  $4/n$  où  $n$  est un nombre impair, *Mathesis* 65 (1956) 219-222 (MR 18, 284a). [odd]
- [**Sed,59**] Sedláček, Jiří, Concerning unit fraction decompositions, *Casopis Pest. Mat.* 84 (1959) 188-197 (MR 23# A829). [Sch]

- [Sel,78 ] Selmer, Ernst S., Unit fraction expansions and a multiplicative analogy, *Nordisk. Mat. Tidskr.* 25/26 (1978) 91-109, 112 (MR 80c: 10012). [F-S,  $\mathcal{V}_s$ ]
- [Sh,86 ] Shan, Zun, On the Diophantine equation  $\sum \frac{1}{x_i} = \frac{a}{n}$  *Chinese Ann. Math. Ser. B* No. 2 (1986) 213-220 (MR 87j: 11026).
- [Si,11 ] Sierpiński, Waclaw, On some algorithms for developing real numbers in series, *Oeuvres Choiesies I.*, pp.236-254. [verschiedene Algorithmen, F-S]
- [Si,55 ] Sierpiński, Waclaw, Sur une propriété des nombres naturelles, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 39 (1955) 69-74. [pr]
- [Si,56 ] Sierpiński, Waclaw, Sur les décompositions de nombres rationnelles en fractions primaires, *Mathesis* 65 (1956) 16-32, auch in *Oeuvres choisies I*, pp. 169-184 (MR 17, 1185d). [ $\mathcal{V}_s$ ,  $\mathcal{N}_s$ ,  $\mathcal{Z}_s$ , Erd-Str, Sierp, Sch, int, odd]
- [Si,57 ] Sierpiński, Waclaw, *On the decomposition of Rational Numbers in Unit fractions*, Warsaw, PWN, 1957. [F-S,  $\mathcal{V}_s$ ,  $\mathcal{N}_s$ ,  $\mathcal{Z}_s$ , Erd-Str, Sierp, op, int, odd, ss]
- [Si,64 ] Sierpiński, Waclaw, Remarques sur une problème de M. P. Erdős, *Publ. Inst. Math.* 4 (18) (1964) 125-134 (MR 30# 3056). [pw, ss]
- [So,05 ] Sós, Ernst, Die diophantische Gleichung  $\frac{1}{x} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$  *Zeitschr. für Math. und Nat. Unterricht* 36 (1905) 97-102, siehe auch [Di,20]. [op]
- [So,06 ] Sós, Ernst, Zwei diophantische Gleichungen, *ibid.* 37 (1906) 186-190, siehe auch [Di,20]. [op]
- [Sr,48 ] Srinivasan, A.K., Practical numbers, *Current Science* 17 (1948) 179-180 (MR 10, 356). [pr]
- [Ste,53 ] Stewart, B.M., Egyptian fractions, *Pentagon* 13 (1953) 67-74. [F-S, SM, M]
- [Ste,54 ] Stewart, B. M., Sums of distinct divisors, *Amer. J. Math.* 76 (1954) 779-785 (MR 16, 336). [odd, pr]
- [Ste,64 ] Stewart, B. M., *Theory of numbers*, 2nd ed., Macmillan, New York, 1964. [F-S, SM, Erd-Str, Sierp]

- [**SteWe,66**] Stewart, B. M. und W. A. Webb, Sums of fractions with bounded numerators, *Canad. J. Math.* 18 (1966) 999-1003 (MR 33# 7287).
- [**StSu,78**] Straus, E. G. und M. V. Subbarao, On the representation of fractions as sum and difference of three simple fractions, *Proc. of the 7th Manit. Conf. on Numer. Math. and Comp.*, Congr. Numer. No. XX Util. Math., Winnipeg, Manit., 1978, pp. 561-579, (MR 80j: 10014). [ $\mathcal{Z}_s$ ]
- [**SuRa,65**] Suryanarayana, D. und N. Venkateswara Rao, On a paper of André Schinzel, *J. Indian Math. Soc.* 29 (1965) 165-167 (MR 34# 2521). [odd]
- [**Sy,1880**] Sylvester, J. J., On a point in the theory of vulgar fractions und Postscript to note on a point in vulgar fractions, *AMM* 3 (1880) 332-335, 388-389; auch in *Collected Math. Papers of James Joseph Sylvester*, III, pp. 440-445, Cambridge Univ. Pr., 1909. [F-S]
- [**TeYo,90**] Tenenbaum, G. und H. Yokota, Length and denominators of Egyptian fractions III, *JNT* 35, No. 2 (1990) 150-156 (ZBL 713.11029).
- [**Te,71**] Terzi, D.G., On a conjecture by Erdős-Straus, *BIT* (1971) 212-216 (MR 45# 6755).
- [**Tr,88**] Treiber, Heiner, Brüche als Summe von Stammbrüchen, *Wiss. Z. Päd. Hochsch. Dr. Th. Neubauer Erfurt* 24, No. 2, (1988) 134-140 (MR 89m: 11032).
- [**Va,70**] Vaughan, R.C., On a problem of Erdős, Straus, and Schinzel, *Mathematika* 17 (1970) 193-198 (MR 44# 6600). [Erd-Str, Sch]
- [**Vi,73**] Viola, C., On the Diophantine equations  $\prod_0^k x_i - \sum_0^k x_i = n$  and  $\sum_0^k \frac{1}{x_i} = \frac{a}{n}$ , *Acta. Arithm.* 22 (1973) 339-352 (MR 48# 234).
- [**Vog,82**] Vogel, Kurt, Zur Geschichte der Stammbrüche und der aufsteigenden Kettenbrüche, *Sudhoffs Archiv* 66 (1982) 1-19. [h, F-S, SM, M]
- [**Vos,85**] Vose, Michael D., Egyptian fractions, *Bull. Lond. M. Soc.* 17 (1985) 21-24 (MR 86b: 11024).



- [**Wa,91**] Wagon, Stan, *Mathematica in Action*, New York, Freeman, pp. 271-277, 400, 409. [F-S, SM, odd]
- [**We,70a**] Webb, William A., Egyptian fractions, *Math. Notes from Wash. State Univ.* 13:1 (1970) 1-3. [Erd-Str]
- [**We,70b**] Webb, William A., On  $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  *Proc. Amer. Math. Soc.* 25 (1970) 578-584 (MR 41# 1639). [Erd-Str]
- [**We,74**] Webb, William A., Rationals not expressible as a sum of three unit fractions *Elem. Math.* 29 (1974) 1-6 (MR 48# 8369). [ $\mathcal{V}_3$ ]
- [**We,75a**] Webb, William A., On a theorem of Rav concerning Egyptian fractions, *Canad. Math. Bull.* 18 (1975) 155-156 (MR 51# 12266). [ $\mathcal{V}_s$ ]
- [**We,75b**] Webb, William A., On the unsolvability of  $\frac{k}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ , *Notices. Amer. Math. Soc.* 22 (1975) A-485.
- [**Woh,72**] Wohlgemuth, Bernhardt, Egyptian fractions, *J. Recr. Math.* 5 (1972) 55-58. [F-S, M]
- [**Wor,76**] Worley, R. T., Signed Sums of reciprocals I, II; *J. Austral. Math. Soc.* A 21 (1976) 410-413, 414-417 (MR 53# 13090-13091). [ $\mathcal{Z}_s$ ]
- [**Yam,64**] Yamamoto, Koichi, On a conjecture of Erdős, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.* Ser. A 18 (1964) 166-167 (MR 30# 1968).
- [**Yam,65**] Yamamoto, Koichi, On the Diophantine equation  $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ , *ibid.* Ser A 19 (1965) 37-47 (MR 31# 2203). [Erd-Str]
- [**Yan,82**] Yang, Xun Qian, A note on  $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ , *Proc. Amer. Math. Soc.* 85 (1982) 496-498 (MR 83j: 10017). [Erd-Str]
- [**Yo,86**] Yokota, Hisashi, On a conjecture of M. N. Bleicher and P. Erdős, *JNT* 24 (1986) 89-94 (MR 87k: 11036).
- [**Yo,86/88**] Yokota, Hisashi, Length and denominators of Egyptian fractions, I, *JNT* 24 (1986) 249-258 (MR 88a: 11032). II, *JNT* 28 No. 3 (1988) 258-271 (MR 89e: 11019).
- [**Yo,88a**] Yokota, Hisashi, Denominators of Egyptian fractions, *JNT* 28 No. 3 (1988) 272-282 (MR 89f: 11051).

[**Yo,88b**] Yokota, Hisashi, On a problem of Bleicher and Erdős, *JNT* 30 No. 2 (1988) 198-207 (MR 89k: 11017).

[**Yo,90**] Yokota, Hisashi, On number of integers representable as sums of unit fractions, *Can. Math. Bull.* 33 No. 2 (1990) 235-241 (ZBL 694.10021).